دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

یک قضیه درونیابی در منطق مرتبه اول

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

دکتر جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

نیر جنگی بهادر

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

ای آنکه یادش مایه شرافت یادکنندگان است، و ای آنکه سپاسش سبب رستگاری شکرگزاران است، و ای آنکه طاعتش موجب رهایی فرمانبرداران است، بر محمّد (ص) و آل او درود بفرست، و دلهای ما را از هر یادی به یاد خود، و زبانهامان را از هر سپاسی به سپاس خود، و اعضایمان را از هر طاعتی به طاعت خویش مشغول بدار.

پس اگر برای ما فراغت از کاری مقدر ساختی، آن را فراغتی توأم با سلامتی قرار ده که در پی آن هیچ وبال و مظلمه ای دامنگیر ما نگردد، و در آن هیچ خستگی به ما نرسد، تا نویسندگان گناه با نامه ای تهی از یاد کرد از بد از نزد ما بازگردند و نویسندگان خوبی ها در حالی ما را ترک گویند که به خاطر کردار نیکی که از ما نوشته اند، شادمانند.

و چون روزگار زندگانی ما بگذرد، و رشته عمرمان از هم گسیخته شود، و آن دعوت حتمی تو که اجابت کردنش قطعی است، در رسد، پس بر محمّد (ص) و آل او درود بفرست، و پایان آنچه را نویسندگان اعمال ما بطور کامل ثبت و ضبط می کنند، توبه ای پذیرفته شده قرار ده، که پس از آن ما را بر گناهی که مرتکب شده ایم و معصیتی که مبتلا شده ایم بازخواست نکنی، و آن روزی که خبرهای بندگان خویش را برملا می سازی، پوششی را که بر گناهان ما افکنده ای در برابر دیده شاهدان و حاضران، برنداری، که همانا تو بر کسی که تو را بخواند مهربان، و آن که تو را ندا کند، اجابت کننده ای.

ستایش خداوندی را که اول است بی آنکه پیش از او اولی باشد، و آخر است بی آنکه پس از وی آخری باشد.

از فرمایشات حضرت امام سجّاد (ع)

تقدیم به:

پدرم، برادرانم،
و
روح پاک مادرم.

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پور مهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **جعفر صادق عیوضلو** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، کمال تشکّر را دارم.
از جناب آقای دکتر **مرتضی منیری** که داوری این پایان‌نامه را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکّر می‌نمایم.
از تمام دوستان دوران تحصیلم و هم‌کلاسی‌های دوران تحصیلم کمال تشکّر و قدردانی را دارم.
ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از آقای دکتر مرتضی فغفوری، دکتر اصغر رنجبری، دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر صداقت شهمراد معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حمید موسوی مدیرگروه ریاضی محض، و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکّر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام، مخصوصاً **مرحومه مادرم** که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم و به روح پاک **مادر مهربانم** درود و صلوات می‌فرستم.

نیر جنگی بهادر
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: جنگی بهادر نام: نیر
عنوان: یک قضیه درونیابی در منطق مرتبه اول
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پور مهر استاد مشاور : دکتر جعفر صادق عیوضلو
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۶
کلید واژه‌ها: نظریه مدل کلاسیک، منطق مرتبه اول، ساختارهای چندگونه، درونیابی، قضایای پایایی و رده‌بندی.

چکیده

قضیه درونیابی لیندون بیان می‌کند که برای هر ترکیب شرطی معتبر بین دو جمله کاملاً محمولی (جملات فاقد نمادهای ثابت و نمادهای تابعی) از مرتبه اول، فرمول درونیابی چنان وجود دارد که در آن هر نماد محمولی (رابطه‌ای) بصورت مثبت (یا منفی) ظاهر می‌شود فقط اگر آن نماد بصورت مثبت (منفی) در هر دو فرمول مقدم و نتیجه ظاهر شود. ما نتیجه‌ای مشابه، ولی کلی‌تری را ثابت می‌کنیم که در آن شرط اضافی این است که برای یک چندتایی ثابت $\mathbb{U}$ از محمولات تک موضعی، تمام سورهای فرمولهای تحت بررسی بطور صریح به یکی از محمولات تک موضعی $U \in \mathbb{U}$ نسبی‌سازی شده‌اند. تحت این شرط، سوری‌سازی وجودی (عمومی) روی U یک رخداد مثبت (منفی) از U را ایجاد می‌کند. نشان داده شده است که این قضیه درونیابی جدید، تنها توسط برهانی نظریه-مدلی مقدماتی و کانونی بدست آمده و چند نتیجه مرتبط را یکسان سازی می‌کند؛ مانند برخی قضایای رده‌بندی که در مورد توسیعها و زیرساختارها با مفاهیم یکنوایی، و همچنین قضیه درونیابی چندگونه که روی رخدادهای مثبت (یا منفی) محمولها و روی گونه‌های سوری‌سازی شده وجودی (عمومی) متمرکز شده‌اند.

فهرست مطالب

مقدمه

برای ترکیب شرطی $\varphi \models \psi$ داده شده، یک درونیاب برای این ترکیب شرطی، فرمول میانی χ است که در شرایط $\varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi$ صدق می‌کند. در جستجوی درونیابهای χ برای برخی کلاسهای بطور نحوی[1] محدود از فرمولها، می‌توان تشخیص داد که چقدر از اطلاعات در ترکیب شرطی $\varphi \models \psi$، که به χ منتقل شده است تحت آن محدودیتهای نحوی قابل بیانند. الزامات نحوی طبیعی روی درونیاب، به روی خواص نحوی مشترک φ و ψ مرکزیت دارند. بنابراین خواص درونیاب که وجود درونیابهای خاصی را تضمین می‌کنند، خواص نحوی هستند که بر خواص معناشناسی[2] غلبه می‌کنند. پس آنها می‌توانند محکی باشند برای اندازه‌گیری اینکه چقدر نحو، معنا را بازتاب می‌کند. به زبان دیگر، درونیاب بصورت نحوی یک تنگنا بین فرض و حکم را نشان می‌دهد. در منظر نظریه مدلی، این پدیده بیشتر نمایان می‌شود، بصورتی که نتایج درونیابی به نتایج تعریف‌پذیری یا بیان‌پذیری منجر می‌شوند. آنها بخصوص در محتوای قضایای رده‌بندی نظریه-مدلی، نمایان می‌شوند.

بنیادی‌ترین خاصیت درونیابی را در نظر بگیرید. قضیه درونیابی کریگ [۵] بیان می‌کند که هر ترکیب شرطی معتبر مرتبه اول $\varphi \models \psi$ درونیابی مانند χ دارد که زبان آن به زبان مشترک φ و ψ محدود می‌شود. نتیجه رده‌بندی متناظر آن، که فوراً از قضیه درونیابی کریگ نتیجه می‌شود، به قرار زیر است: برای زبانهای $\tau_0 \subseteq \tau$، τ-فرمولهایی که درستی آنها در τ-ساختارها کاملاً توسط

[1] نحو اشاره به ساختار کاملاً رسمی زبان می‌کند؛ بعنوان مثال، طول جمله و مجموعه‌ای از نمادهای ظاهر شده در یک جمله، خواص نحوی هستند.

[2] معناشناسی اشاره به تفسیر یا معنای زبان می‌کند؛ درستی یا نادرستی یک جمله در یک مدل یک معیار معناشناسی است.

$\tau_\circ$-تحویل‌ها[۳] مشخص می‌شوند، دقیقاً آنهایی هستند که معادل با $\tau_\circ$-فرمولی‌ها می‌باشند. تحویل مستقیم این ادعای بیان‌پذیری به درونیابی، یک کاربرد نوعی از این قضیه است. برای فرمول φ داده شده، می‌توان به فرمول متفاوت φ' که در آن تمام فرمولهای $\tau \setminus \tau_\circ$ اسمهای جدیدی دارند، گذر کرد، پس $\varphi \models \varphi'$ یک ترکیب شرطی معتبر است. درونیاب کریگ برای این ترکیب شرطی یک $\tau_\circ$-فرمولی است که معادل φ است. بعنوان نتیجه دیگر و بهتر شناخته شده‌تر از قضیه درونیابی کریگ، قضیه تعریف‌پذیری بِث می‌تواند بطرز خیلی مشابه‌ای اثبات شود. (برای مثال [۱۱] را ببینید.)

تعمیمها و گونه‌های زیادی از قضیه درونیابی کریگ برای منطق‌های دیگر و همچنین برای منطق مرتبه اول یافت شده‌اند. از مهمترین آنها که کاربردهای جالبی در نظریه مدلی مرتبه اول کلاسیک دارند، درونیابی لیندون [۱۲] و درونیابی چندگونه‌ای فِفِرمن [۷، ۸] می‌باشند.

قضیه درونیابی لیندون قطبی‌های رخ داده در محمولات را، در نظر می‌گیرد، یعنی بین رخدادهای مثبت و منفی تفاوت می‌گذارد. محمولات می‌توانند بصورت مثبت و منفی در درونیاب ظاهر شوند اگر فقط آنها مثبت (منفی) در فرض φ و نتیجه ψ ظاهر شده باشند. نتیجه رده‌بندی متناظر آن، یکنوایی را با مثبت بودن متناظر می‌کند.

قضیه درونیابی فِفِرمن در مورد درونیابی در یک چارچوب چندگونه به جای ساختارهای یک‌گونه استاندارد است. برای این چارچوب، بهر حال، شروط تعیین شده فراتر از شرط کریِگ می‌رود، با در نظر گرفتن اینکه چه گونه‌هایی بطور وجودی (عمومی) در درونیاب سوری‌سازی شده‌اند. این تحلیل کاربردهای نظریه-مدلی بسیار وسیعی دارد که یکی از طبیعی‌ترین آنها قضیه رده‌بندی است که پایا بودن تحت توسیعها را با فرمولهای وجودی متناظر می‌سازد.

نقطه شروع برای ملاحظات اخیر، این مشاهده است که دو خاصیت درونیاب که بطور سطحی مرتبط به نظر می‌رسند توسط ترجمه‌ای طبیعی از ساختارهای چندگونه به ساختارهای یک‌گونه که در آن گونه‌های مختلف بصورت زیردامنه‌های مختلف مدل‌سازی می‌شوند، هر کدام توسط یک محمول تک موضعی جدید علامت‌گذاری می‌گردند. در این ترجمه یک سوری‌سازی وجودی یا عمومی روی

---

[۳] فرض کنید τ و $\tau_\circ$ زبانهای مرتبه اول باشند که $\tau_\circ \subseteq \tau$؛ قرار دهید $\mathfrak{A} = (A, a)$ یک $\tau_\circ$-ساختار و $\mathfrak{A}' = (A', a')$ یک τ-ساختار باشند. می‌گوییم $\mathfrak{A}$ یک تحویل $\mathfrak{A}'$ است (دقیق‌تر، $\tau_\circ$-تحویلِ $\mathfrak{A}'$) اگر و تنها اگر $A = A'$ و a و a' روی $\tau_\circ$ توافق داشته باشند. در این مورد $\mathfrak{A}'$ بسط $\mathfrak{A}$ نامیده می‌شود، و با $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \tau_\circ$ نشان می‌دهند.

گونه U، به ترتیب یک سوری‌سازی U-نسبی‌شده بصورت $\exists x(Ux \wedge ....)$ یا $\forall x(Ux \rightarrow ...)$ می‌باشد. بنابراین سوری‌سازی وجودی یک رخداد مثبت و سوری‌سازی عمومی یک رخداد منفی متناظر با نوع محمول را ایجاد می‌کند. قضیه درونیابی لیندون به نظر می‌رسد که چیزی را در این مورد به ما بگوید و با ترجمه کردن عکس آن می‌توان امیدوار بود که به گونه‌های سوری‌سازی شده وجودی و عمومی در یک درونیاب دست یافت. اما البته، یک درونیاب لیندونِ بدست آمدهِ برایِ این ترجمه ترکیب شرطی چندگونه معتبر، لزومی ندارد که خودش (معادل) یک ترجمه فرمول چندگونه باشد. بیشتر، قضیه درونیابی فِفِرمن با توجه به فرض و حکم یک رده‌بندی نامتقارن درباره محدودیتها روی گونه‌های سوری‌سازی شده وجودی (عمومی) را نشان می‌دهد، در حالیکه قضیه درونیابی لیندون کاملاً متقارن است.

ما در این پایان‌نامه، که بر مبنای مقاله [۱۴] تنظیم شده است، نتیجه درونیابی را در یک چارچوب فرمولهای منطق مرتبه اولِ نسبی‌سازی شده ارائه می‌کنیم، که در حقیقت زمینه مشترک برای درونیابی لیندون و درونیابی چندگونه‌ای فِفِرمن ارائه می‌دهد. این نتایج علاوه بر دادن پایه‌ای نظریه مدلی مشترک برای این دو نتیجه درونیابی مهم، همچنین منظری یکنوا برای برخی کاربردهای شناخته شده و برخی کاربردهای جدید ارائه می‌دهد، که کاربرد جدید شامل قضیه رده‌بندی فون بِنثِم می‌باشد.

فصل ۱

معرفی چند قضیه درونیابی

۱.۱ قضیه درونیابی کرِیگ

در منطق ریاضی، قضیه درونیابی کرِیگ در مورد رابطه بین نظریه های مختلف منطقی است. این قضیه بیان می‌کند که اگر فرمول φ، فرمول ψ را نتیجه دهد آنگاه یک فرمول سوم θ که درونیابی نامیده می‌شود، وجود دارد بطوریکه هر نماد نامنطقی[۱] در θ در هر دوی φ و ψ ظاهر شود، و φ فرمول θ و θ فرمول ψ را نتیجه دهد. این قضیه برای اولین بار در منطق مرتبه اول در سال ۱۹۵۷ توسط ویلیام کرِیگ اثبات شد. نوع دیگر این قضیه برای منطق گزاره‌ها برقرار است. شکل قویتر قضیه درونیابی کرِیگ در منطق مرتبه اول توسط راجرِ لیندون در سال ۱۹۵۹ اثبات شده است. این نتیجه کلی را در برخی اوقات قضیه کرِیگ - لیندون می‌نامند.

۱.۱.۱ قضیه درونیابی کرِیگ در منطق گزاره ها (منطق مرتبه صفر)

ابتدا قضیه درونیابی کرِیگ را در منطق گزاره‌ها بیان و اثبات می‌کنیم:

قضیه ۱.۱.۱. *اگر $\models \varphi \to \psi$ آنگاه یک θ (درونیابی) وجود دارد بطوریکه $\models \varphi \to \theta$ و $\models \theta \to \psi$ و $atoms(\theta) \subseteq atoms(\varphi) \cap atoms(\psi)$. منظور از $atoms(\varphi)$ مجموعه‌ای از متغیرهای گزاره‌ای است که در φ ظاهر می‌شود.*

برهان. فرض کنید $\models \varphi \to \psi$. اثبات را با استقراء روی تعداد متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در φ که در ψ ظاهر نشده است، شروع می‌کنیم. این را با نماد $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)|$ نشان می‌دهیم. برای فرض استقراء قرار می‌دهیم : $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)| = ۰$. در این حالت، φ مناسب است. زیرا از آنجا که $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)| = ۰$ می‌دانیم که

$$atoms(\varphi) \subseteq atoms(\varphi) \cap atoms(\psi).$$

بعلاوه داریم $\models \varphi \to \psi$ و $\models \varphi \to \varphi$. پس φ یک درونیابی مناسب در این حالت است. فرض استقراء می‌کنیم که نتیجه برای هر φ و ψ که $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)| = n$ برقرار است.

---

[۱] به نمادهای نامنطقی پارامتر هم گفته می‌شود که شامل نمادهای تابعی و نمادهای محمولی و نمادهای ثابت می‌باشد.

برای حکم استقراء اثبات می‌کنیم که نتیجه برای هر φ و ψ که $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)| = n + 1$ برقرار است. برای اثبات حکم فرض می‌کنیم که $|atoms(\varphi) - atoms(\psi)| = n + 1$. در نظر بگیرید $p \in atoms(\varphi)$ ولی $p \notin atoms(\psi)$. تعریف می‌کنیم: $\varphi' := \varphi[\top/p] \vee \varphi[\bot/p]$.

اینجا منظور از $\varphi[\top/p]$ این است که در φ بجای p، $\top$ جانشین می‌شود و مشابهاً $\varphi[\bot/p]$ به معنی این است که بجای p، $\bot$ می‌نشیند. نشان می‌دهیم که

$$(۱) \models \varphi' \to \psi$$

یا به عبارت دیگر برای هر ارزشگذاری V داریم: $V(\varphi' \to \psi) = T$. بایستی ثابت کنیم اگر $V(\varphi') = T$ آنگاه $V(\psi) = T$. تعریف می‌کنیم:

$$V' = (V - \{(p, V(p)\} \cup \{(p, T)\}$$
$$V'' = (V - \{(p, V(p)\} \cup \{(p, F)\}$$

چون $p \in atoms(\varphi)$ و $p \notin atoms(\psi)$، و $\models \varphi \to \psi$، پس از $V(\varphi') = T$ نتیجه می‌شود که $V'(\varphi) = T$ پس داریم $V'(\psi) = T$، و همچنین $V''(\varphi) = T$ پس باز هم $V''(\psi) = T$. در نتیجه در هر حالت داریم: $V(\psi) = T$، و حکم ثابت می‌شود.

$$(۲)\ |atoms(\varphi') - atoms(\psi)| = n$$
$$(۳) \models \varphi \to \varphi'$$

بایستی ثابت کنیم که $V(\varphi \to \varphi') = T$. اگر $V(\varphi) = T$ باشد، آنگاه

$$V(p) = T \Rightarrow V(\varphi[\top/p]) = T \Rightarrow V(\varphi') = T.$$
$$V(p) = F \Rightarrow V(\varphi[\bot/p]) = T \Rightarrow V(\varphi') = T.$$

از (۱) و (۲) و فرض استقراء، فرمول درونیابی θ بطوری وجود دارد که:

$$(۴) \models \varphi' \to \theta$$
$$(۵) \models \theta \to \psi$$

از (۳) و (۴) داریم:

$$(۶) \models \varphi \to \theta$$

پس θ یک درونیابی برای ψ و φ است. □

مثال ۲.۱.۱. در منطق گزاره‌ها، قرار دهید:

$$\varphi = \neg(P \wedge Q) \to (\neg R \wedge Q)$$
$$\psi = (T \to P) \vee (T \to \neg R)$$

حال φ، فرمول ψ را نتیجه می‌دهد. فرمولهای φ و ψ را بصورت نرمال عطفی می‌نویسیم:

$$\varphi = \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(\neg R \wedge Q)) = (P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge Q) = (P \vee \neg R) \wedge Q$$
$$\psi = \neg(T \wedge \neg P) \vee \neg(T \wedge R) = (\neg T \vee P) \vee (\neg T \vee \neg R) = \neg T \vee (P \vee \neg R)$$

بنابراین اگر φ برقرار باشد آنگاه $(P \vee \neg R)$ نیز برقرار است. از طرف دیگر $(P \vee \neg R)$، فرمول ψ را نتیجه می‌دهد. از آنجا که متغیرهای گزاره‌ای $(P \vee \neg R)$ در هر دوی φ و ψ ظاهر شده‌اند، پس $(P \vee \neg R)$ یک درونیابی برای ترکیب شرطی $\varphi \to \psi$ است.

۲.۱.۱ قضیه درونیابی کرِیگ در منطق مرتبه اول (منطق محمولات)

قضیه ۳.۱.۱. (***درونیابی کرِیگ***)

φ و ψ را جملاتی در نظر بگیرید که $\varphi \models \psi$. آنگاه یک جمله θ چنان وجود دارد که :

(الف) *$\psi \models \theta$ و $\theta \models \varphi$.*

(ب) *هر نماد رابطه ای و تابعی یا ثابت (به استثنای تساوی) که در θ ظاهر می‌شود، همواره در هر دوی φ و ψ ظاهر می‌شود.*

جمله θ درونیابی کرِیگ φ و ψ نامیده می‌شود.

برهان. فرض کنید که هیچ فرمول درونیابی مانند θ برای φ و ψ موجود نباشد. اثبات می‌کنیم که در این صورت ترکیب شرطی $\varphi \models \psi$ برقرار نیست. برای اینکار یک مدل از $\varphi \wedge \neg\psi$ می‌سازیم. بدون

کاستن از کلیت، $\mathcal{L}$ را زبان تمام نمادهایی فرض می‌کنیم که یا در φ، یا در ψ و یا در هر دوی آنها ظاهر می‌شود. $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ را بترتیب زبان تمام نمادهای ظاهر شده در φ و ψ فرض می‌کنیم و $\mathcal{L}_0$ را زبان تمام نمادهای ظاهر شده در هر دوی φ و ψ قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0 \quad , \quad \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}.$$

توسیع $\mathcal{L}'$ از $\mathcal{L}$ را با اضافه کردن یک مجموعه شمارش‌پذیر C از نمادهای ثابت جدید بدست می‌آوریم و قرار می‌دهیم

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup C \quad , \quad \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \cup C \quad , \quad \mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2 \cup C.$$

یک جفت از نظریه‌های T و U را بترتیب در $\mathcal{L}'_1$ و $\mathcal{L}'_2$ در نظر می‌گیریم. جمله θ از $\mathcal{L}'_0$ را جداکننده T و U می‌گویند اگر وتنها اگر

$$T \models \theta \quad , \quad U \models \neg\theta.$$

T و U را جدانشدنی می‌گویند اگر وتنها اگر چنین جمله θ از $\mathcal{L}'_0$ آنها را جدا نکند. برای شروع، می‌بینیم که:

(۱) $\{\varphi\}$ و $\{\neg\psi\}$ جدانشدنی هستند.

اگر $\theta(c_1, \ldots, c_n)$، $\{\varphi\}$ و $\{\neg\psi\}$ را از هم جدا کند و $u_1, \ldots, u_n$ متغیرهایی باشند که در $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ ظاهر نشده‌اند، آنگاه

$$\varphi \models (\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n), \neg\psi \models \neg((\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n))$$

از طرفی،

$$\neg\psi \models \neg((\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n)) \Leftrightarrow \models \neg\psi \to \neg((\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n))$$

و

$$\begin{aligned}\neg\psi \to \neg((\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n)) &\equiv \psi \vee \neg((\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n)) \\ &\equiv (\forall u_1, \ldots, u_n)\theta(u_1, \ldots, u_n) \to \psi\end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$\varphi \models (\forall u_۱, \dots, u_n)\theta(u_۱, \dots, u_n) \models \psi$$

که $(\forall u_۱, \dots, u_n)\theta(u_۱, \dots, u_n)$ یک درونیابی کرِیگ φ و ψ است و این خلاف فرض است.
حال، قرار دهید

$$\varphi_۰, \varphi_۱, \varphi_۲, \dots$$
$$\psi_۰, \psi_۱, \psi_۲, \dots$$

بترتیب شماری از همه جملات $\mathcal{L}'_۱$ و $\mathcal{L}'_۲$ باشند. می‌توان دو رشته صعودی از نظریه‌های،

$$\{\varphi\} = T_۰ \subset T_۱ \subset T_۲ \subset \dots$$
$$\{\neg\psi\} = U_۰ \subset U_۱ \subset U_۲ \subset \dots$$

را بترتیب در $\mathcal{L}'_۱$ و $\mathcal{L}'_۲$، طوری ساخت که:

(۲) T_m و U_m مجموعه‌های متناهی از جملات جدانشدنی هستند. (چون طبق (۱)، $\{\varphi\}$ و $\{\neg\psi\}$ جدانشدنی هستند.)

(۳) اگر $T_m \cup \{\varphi_m\}$ و U_m جدانشدنی باشند، آنگاه $\varphi_m \in T_{m+۱}$. (یعنی قرار می‌دهیم $T_{m+۱} = T_m \cup \{\varphi_m\}$).

اگر $T_{m+۱}$ و $U_m \cup \{\psi_m\}$ جدانشدنی باشند، آنگاه $\psi_m \in U_{m+۱}$. (یعنی قرار می‌دهیم $U_{m+۱} = U_m \cup \{\psi_m\}$).

برای T_m و U_m نظریه های $T_{m+۱}$ و $U_{m+۱}$ بصورت واضح (ذکر شده در بالا) ساخته می‌شوند و جدانشدنی بودن $T_{m+۱}$ و $U_{m+۱}$ از تعریف نتیجه می‌شود.

(۴) اگر $\varphi_m = (\exists x)\sigma(x)$ و $\varphi_m \in T_m$، آنگاه **وجود دارد** $c \in C$ که $\sigma(c) \in T_{m+۱}$.

اگر $\psi_m = (\exists x)\delta(x)$ و $\psi_m \in U_m$، آنگاه **وجود دارد** $d \in C$ که $\delta(d) \in U_{m+۱}$.

ثابت‌های c و d را چنین انتخاب می‌کنیم که در T_m و U_m و φ_m و ψ_m ظاهر نشده باشند. آنگاه خاصیت جدانشدنی حفظ خواهد شد. (اگر فرض کنیم که $T_{m+۱}$ و $U_{m+۱}$ جدانشدنی نباشند، طبق (۴) داریم: $\sigma(c) \in T_{m+۱}$ و $\delta(d) \in U_{m+۱}$، پس فرمول $\theta' \in \mathcal{L}'_۰$ چنان وجود دارد که

$$T_m \cup \{\sigma(c)\} \models \theta' \quad , \quad U_m \cup \{\delta(d)\} \models \neg\theta'$$

که ممکن است c و d در θ' ظاهر شوند. داریم:

$$T_m \models \sigma(c) \rightarrow \theta'(c,d) \quad , \quad U_m \models \delta(d) \rightarrow \neg\theta'(c,d)$$

می‌توان نوشت:

$$T_m \models \forall x(\sigma(x) \rightarrow \theta') \quad , \quad U_m \models \forall x(\delta(x) \rightarrow \neg\theta')$$

پس (طبق اصول موضوعه حساب صوری محمولات) نتیجه می گیریم که

$$T_m \models \exists x\, \sigma(x) \rightarrow \theta' \quad , \quad U_m \models \exists x\, \delta(x) \rightarrow \neg\theta'$$

و

$$T_m \cup \{\exists x\, \sigma(x)\} \models \theta' \quad , \quad U_m \cup \{\exists x\, \delta(x)\} \models \neg\theta'$$

و طبق (۴) داریم: $\varphi_m = (\exists x)\sigma(x)$ و $\psi_m = (\exists x)\delta(x)$، پس $T_m \cup \{\varphi_m\}$ و $U_m \cup \{\psi_m\}$ جداشدنی می‌باشند، که خلاف فرض است).

قرار دهید

$$T_\omega = \bigcup_{m<\omega} T_m \quad , \quad U_\omega = \bigcup_{m<\omega} U_m$$

آنگاه T_ω و U_ω جدانشدنی هستند. (چون طبق قسمت (۲)، T_m و U_m مجموعه‌های متناهی از جملات جدانشدنی هستند پس T_ω و U_ω که اجتماع T_mها و U_mها می‌باشند، جدانشدنی هستند.)
حال نشان می دهیم که $T_\omega \cup U_\omega$ سازگار است. ابتدا نشان می‌دهیم که:

(۵) T_ω یک نظریه سازگار ماکسیمال[۲] در $\mathcal{L}'_1$ و U_ω یک نظریه سازگار ماکسیمال در $\mathcal{L}'_2$ است.
برای نشان دادن این، فرض کنید $\varphi_m \notin T_\omega$ و $(\neg\varphi_m) \notin T_\omega$. از آنجا که $T_m \cup \{\varphi_m\}$ از U_m مجزا می‌باشد، $\theta \in \mathcal{L}'_0$ وجود دارد بطوریکه

[۲] یک مجموعه از فرمول Φ در منطق مرتبه اول سازگار نامیده می‌شود اگر وتنها اگر فرمول ϕ ای موجود نباشد بطوریکه $\Phi \vdash \phi$ و $\Phi \vdash \neg\phi$.
نظریه Φ را کامل می‌گویند هرگاه سازگار بوده و برای هر فرمول ϕ داشته باشیم $\phi \in \Phi$ یا $\neg\phi \in \Phi$.
Φ سازگار ماکسیمال گفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر فرمول ϕ ، اگر $(\Phi \cup \{\phi\})$ سازگار باشد آنگاه $\phi \in \Phi$.
البته می‌توان گفت که Φ کامل است اگر و تنها اگر سازگار ماکسیمال باشد.

$$.T_\omega \models \varphi_m \to \theta \quad , \quad U_\omega \models \neg\theta$$

با همین استدلال، $\theta' \in \mathcal{L}'_0$ وجود دارد بطوریکه

$$.T_\omega \models \neg\varphi_m \to \theta' \quad , \quad U_\omega \models \neg\theta'$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$T_\omega \models \theta \vee \theta' \quad , \quad U_\omega \models \neg(\theta \vee \theta')$$

که متناقض با جداناپذیری T_ω و U_ω می‌باشد. این نشان می‌دهد که T_ω سازگار ماکسیمال در $\mathcal{L}'_0$ است. اثبات سازگار ماکسیمال بودن U_ω نیز مشابه بالا است.

(۶) $T_\omega \cap U_\omega$ یک نظریه سازگار ماکسیمال در $\mathcal{L}'_0$ است.

برای اثبات، α را یک جمله در $\mathcal{L}'_0$ در نظر می‌گیریم. طبق (۵)، یا $\alpha \in T_\omega$ یا $(\neg\alpha) \in T_\omega$ و یا $\alpha \in U_\omega$ یا $(\neg\alpha) \in U_\omega$. طبق جداناپذیری، نمی‌توانیم داشته باشیم که $\alpha \in T_\omega$ و $(\neg\alpha) \in U_\omega$ و برعکس. بنابراین یا $T_\omega \cap U_\omega \models \alpha$ یا $T_\omega \cap U_\omega \models \neg\alpha$.

حال می‌توانیم یک مدل بسازیم. قرار دهید $\mathfrak{B}'_1 = (\mathfrak{B}', b_0, b_1, \ldots)$ یک مدل از T_ω باشد. با استفاده از (۴) و (۵)، درمی‌یابیم که زیرمدل $\mathfrak{A}'_1 = (\mathfrak{A}_1, b_0, b_1, \ldots)$ با جهان $A_1 = \{b_0, b_1, \ldots\}$، نیز یک مدل از T_ω است. مشابهاً، U_ω یک مدل $\mathfrak{A}'_2 = (\mathfrak{A}_2, d_0, d_1, \ldots)$ با جهان $A_2 = \{d_0, d_1, \ldots\}$ دارد. طبق (۶)، $\mathcal{L}'_0$-تحویل $\mathfrak{A}'_1$ و $\mathfrak{A}'_2$ با تناظر b_n به d_n یکریخت هستند. پس، می‌توانیم $b_n = d_n$ برای هر n بگیریم، که در این صورت $\mathfrak{A}_1$ و $\mathfrak{A}_2$ یک $\mathcal{L}_0$-تحویل (مشترک) خواهند داشت. قرار دهید $\mathfrak{A}$ مدل $\mathcal{L}_1$-تحویل و $\mathcal{L}_0$-تحویل باشد. چون $\varphi \in T_\omega$ و $(\neg\psi) \in U_\omega$ پس $\mathfrak{A}$ مدلی برای $\varphi \wedge \neg\psi$ است، و این متناقض با $\varphi \models \psi$ می‌باشد. $\square$

۲.۱ قضیه سازگاری مشترک رابینسون

یکی دیگر از کاربردهای قضیه درونیابی کرِیگ قضیه سازگاری مشترک رابینسون می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱. $(\Gamma, \mathcal{L})$ نظریه گفته می شود بطوریکه Γ یک مجموعه از جملات $\mathcal{L}$ است و برای هر جمله φ در $\mathcal{L}$، $\varphi \in \Gamma$ هرگاه $\Gamma \models \varphi$.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار باشد، $\mathcal{L}$-نظریه از $\mathfrak{A}$ یک جفت $(\Gamma, \mathcal{L})$ است زمانیکه

$$\Gamma = \{\varphi \in Sent(\mathcal{L}) : \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

توجه کنید که نماد $Sent(\mathcal{L})$ نشان‌دهنده مجموعه جملات $\mathcal{L}$ می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. نظریه $(\Gamma', \mathcal{L}')$ یک توسیع از $(\Gamma, \mathcal{L})$ است بشرطی که $\mathcal{L}'$ یک توسیع بوده از $\mathcal{L}$ و $\Gamma \subseteq \Gamma'$. می‌گوییم که $(\Gamma', \mathcal{L}')$ یک توسیع محافظه کار از $(\Gamma, \mathcal{L})$ است که علاوه بر شرط گفته شده، در شرط $\Gamma = \Gamma' \cap Sent(\mathcal{L})$ نیز برقرار باشد.

قضیه ۴.۲.۱. ***(قضیه سازگاری مشترک رابینسون)***

فرض کنید که $\mathcal{L}_0$، $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$، $\mathcal{L}_3$، Γ_0، Γ_1، Γ_2 در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(i) *$\mathcal{L}_0$، $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$، $\mathcal{L}_3$ زبانهای مرتبه اول باشند؛ $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$، توسیعهایی از $\mathcal{L}_0$ باشند، و $\mathcal{L}_3$ توسیعی از هر دوی $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ می‌باشد؛*

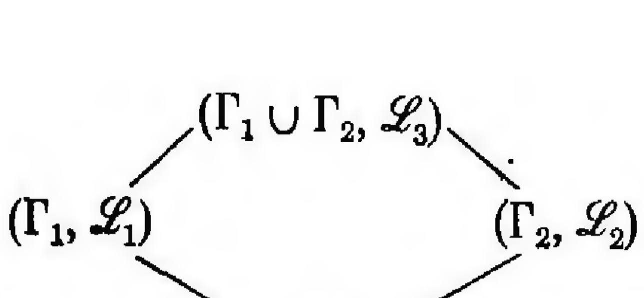
(ii) *هر نماد نامنطقی مشترک $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ یک نماد $\mathcal{L}_0$ است؛*

(iii) *Γ_0، Γ_1، Γ_2 بترتیب نظریه های سازگار در $\mathcal{L}_0$، $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$ می‌باشند؛*

(iv) *Γ_1 و Γ_2 توسیعهای محافظه کار از Γ_0 هستند؛*

آنگاه $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ سازگار است.

مفروضات بیان شده در شکل زیر نشان داده شده است:



برهان. فرض کنید $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ناسازگار باشد. آنگاه، طبق قضیه فشردگی، زیرمجموعه‌های متناهی Δ_1 و Δ_2 بترتیب از Γ_1 و Γ_2 وجود دارند بطوریکه $\Delta_1 \cup \Delta_2$ مدل ندارد؛ و می‌توان فرض کرد که $\Delta_1 \neq \emptyset \neq \Delta_2$. بنابراین داریم

$$\models \bigwedge \Delta_1 \to \bigvee\{\neg\varphi : \varphi \in \Delta_2\}$$

و از اینرو طبق (ii) و قضیه درونیابی کریگ $\chi \in Sent(\mathcal{L}_0)$ وجود دارد بطوریکه

$$\models \bigwedge \Delta_1 \to \chi \ , \ \models \chi \to \bigvee\{\neg\varphi : \varphi \in \Delta_2\}$$

بنابراین $\chi \in \Gamma_1$ و از $\models \bigwedge \Delta_2 \to \neg\chi$ نتیجه می‌شود که $\neg\chi \in \Gamma_2$. اما طبق (iv)، $\chi, \neg\chi \in \Gamma_0$ که متناقض با سازگاری Γ_0 (شرط (iii)) است. $\square$

توجه کنید که اگر Γ_0 کامل باشد، شرط (iv) از شرط (iii) نتیجه می‌شود. قابل توجه است که می‌توان قضیه درونیابی کریگ را براحتی از قضیه رابینسون نتیجه گرفت. در حقیقت، فرض کنید که $\models \varphi \to \psi$. قرار دهید $\mathcal{L}_0$، $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$، $\mathcal{L}_3$ زبانهای مرتبه اول با ثوابت نامنطقی باشند که بترتیب در (۱) هر دوی φ و ψ، (۲) φ، (۳) ψ، (۴) $\varphi \to \psi$ ظاهر می‌شوند. قرار دهید

$$\Gamma = \{\theta \in Sent(\mathcal{L}_0) : \models \varphi \to \theta\}$$

حال ادعا می کنیم که $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ مدل ندارد. $(\circledast)$

برای اثبات، فرض می کنیم که $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ یک مدل $\mathfrak{A}$ در ($\mathcal{L}_2$ -ساختار) دارد. قرار دهید $\Delta = \{\theta \in Sent(\mathcal{L}_0) : \mathfrak{A} \models \theta\}$. آنگاه Δ یک نظریه کامل در $\mathcal{L}_0$ است، و $\Delta \cup \{\neg\psi\}$ یک مدل (مانند $\mathfrak{A}$) دارد. اگر $\Delta \cup \varphi$ یک مدل داشته باشد، قضیه سازگاری رابینسون یک مدل از $\Delta \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ خواهد داد که متناقض با $\varphi \to \psi$ می‌باشد. بنابراین $\Delta \cup \varphi$ مدل ندارد، پس طبق قضیه فشردگی، $\models \varphi \to \bigvee_{i<m} \neg\chi_i$ برای بعضی $m \in \omega$ و $\chi_i \in \Delta$ در $\mathfrak{A}$ برقرار است، که غیر ممکن است. (چون $\chi_i \in \Delta$، پس طبق تعریف Δ نتیجه می‌گیریم که $\chi_i \in Sent(\mathcal{L}_0)$، و بدست آورده بودیم که $\models \varphi \to \bigvee_{i<m} \neg\chi_i$، پس می‌توان طبق تعریف Γ نتیجه گرفت که $\bigvee_{i<m} \neg\chi_i \in \Gamma$ و $\mathfrak{A} \models \bigvee_{i<m} \neg\chi_i$، چون $\chi_i \in \Delta$ پس $\mathfrak{A} \models \chi_i$ و $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i<m} \chi_i$ که تناقض است.) پس $(\circledast)$

برقرار است. طبق قضیه فشردگی، $\models \bigwedge_{i<n} \chi_i \to \psi$ برای بعضی $n \in \omega$ و $\chi_i \in \Gamma$ برقرار است. از طرف دیگر چون $\models \varphi \to \bigwedge_{i<n} \chi_i$، پس نتیجه بدست می‌آید.

۳.۱ قضیه تعریف‌پذیری بِث

یکی دیگر از کاربردهای قضیه درونیابی کریگ در نظریه تعریف‌پذیری است. P و P' را نمادهای محمولی جدید n - موضعی که در زبان $\mathcal{L}$ نیستند، در نظر بگیرید. $\Gamma(P)$ را مجموعه‌ای از جملات زبان $\mathcal{L} \cup \{P\}$ که شامل P' نیست و $\Gamma(P')$ را مجموعه‌ای از جملات زبان $\mathcal{L} \cup \{P'\}$ بگیرید که P' بجای P قرار گرفته است.

تعریف ۱.۳.۱. گوییم $\Gamma(P)$، P را تلویحاً تعریف می‌کند اگر و تنها اگر

$$\Gamma(P) \cup \Gamma(P') \models (\forall x_1, \ldots, x_n)[P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P'(x_1, \ldots, x_n)]$$

معادلاً، اگر $(\mathfrak{A}, R)$ و $(\mathfrak{A}, R')$ مدلهای $\Gamma(P)$ باشند آنگاه $R = R'$.

تعریف ۲.۳.۱. گوییم $\Gamma(P)$، P را صریحاً تعریف می‌کند اگر و تنها اگر یک فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ از $\mathcal{L}$ موجود باشد بطوریکه

$$\Gamma(P) \models (\forall x_1, \ldots, x_n)[P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)]$$

قضیه تعریف‌پذیری بِث این حقیقت اساسی را بیان می‌کند که مفاهیم تعریف‌پذیری صریحی و تلویحی برهم منطبق‌اند. تعریف‌پذیری تلویحی P معادل این است که می توان یکتایی P را ثابت کرد. بنابراین، قضیه تعریف‌پذیری بِث بیان می‌کند که اگر محمول بتواند یکتا مشخص شود آنگاه می‌تواند بطور صریح با فرمولی که شامل P نیست، تعریف شود. برای اینکه نشان دهیم $\Gamma(P)$، P را صریحاً تعریف نمی‌کند، کافیست دو مدل $(\mathfrak{A}, R)$ و $(\mathfrak{A}, R')$ را پیدا کنیم، که $\mathfrak{A}$ یک مدل $\mathcal{L}$-تحویل می‌باشد بطوریکه $R \neq R'$. این روش مفید کلاسیک شناخته شده به روش پادوآ موسوم می‌باشد. حال ما عکس روش پادوآ را که همان قضیه تعریف‌پذیری بِث می‌باشد، ثابت می‌کنیم:

قضیه ۳.۳.۱. (قضیه تعریف‌پذیری بِث)
$\Gamma(P)$، P را تلویحاً تعریف می‌کند اگر و تنها اگر P را صریحاً تعریف کند.

برهان. فرض کنید که $\Gamma(P)$، P را تلویحاً تعریف می‌کند. ثابتهای جدید $c_1, \ldots, c_n$ را به $\mathcal{L}$ اضافه می‌کنیم. آنگاه

$$\Gamma(P) \cup \Gamma(P') \models P(c_1, \ldots, c_n) \to P'(c_1, \ldots, c_n).$$

طبق قضیه فشردگی، زیرمجموعه‌های متناهی $\Delta \subset \Gamma(P)$ و $\Delta' \subset \Gamma(P')$ وجود دارند بطوریکه

$$\Delta \cup \Delta' \models P(c_1, \ldots, c_n) \to P'(c_1, \ldots, c_n).$$

قرار دهید $\psi(P)$ ترکیب عطفی همه $\sigma(P) \in \Gamma(P)$ باشد بطوریکه یا $\sigma(P) \in \Delta$ یا $\sigma(P') \in \Delta'$. آنگاه

$$\psi(P) \wedge \psi(P') \models P(c_1, \ldots, c_n) \to P'(c_1, \ldots, c_n)$$

با چینش دوباره، تمام نمادهای P در یک طرف و تمام نمادهای P' در طرف دیگر، داریم:

$$\psi(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \models \psi(P') \to P'(c_1, \ldots, c_n)$$

حال، طبق قضیه درونیابی کریِگ یک جمله $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ در $\mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ چنان وجود دارد که

$$\psi(P) \wedge P(c_1, \ldots, c_n) \models \theta(c_1, \ldots, c_n) \tag{۱.۱}$$

و

$$\theta(c_1, \ldots, c_n) \models \psi(P') \to P'(c_1, \ldots, c_n). \tag{۲.۱}$$

اما هر مدل $(\mathfrak{A}, R')$ برای $\mathcal{L} \cup \{P', c_1, \ldots, c_n\}$ زمانیکه P را R' تعبیر کنیم همواره یک مدل برای $\mathcal{L} \cup \{P, c_1 \ldots c_n\}$ است. بنابراین (۲.۱) نتیجه می‌دهد

$$\theta(c_1, \ldots, c_n) \models \psi(P) \to P(c_1, \ldots, c_n). \tag{۳.۱}$$

حال از (۱.۱) و (۳.۱) بدست می‌آید

$$\psi(P) \models P(c_1, \ldots, c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \ldots, c_n). \qquad (۴.۱)$$

از آنجا که $c_1, \ldots, c_n$ در $\psi(P)$ ظاهر نمی‌شود (که از $\Gamma(P)$ ساخته شده است)، داریم

$$\psi(P) \models \forall x_1, \ldots, x_n[P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n)]$$

که $x_1, \ldots, x_n$ متغیرهایی هستند که در $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ ظاهر نمی‌شود. بنابراین

$$\Gamma(P) \models \forall x_1, \ldots, x_n[P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n)].$$

□

۴.۱ قضیه درونیابی لیندون

قضیه درونیابی لیندون قویتر شده قضیه درونیابی کرِیگ می‌باشد. برای بیان این قضیه، لازم است که مفهوم مثبت (منفی) ظاهر شدن یک نماد در یک فرمول را بدانیم.

در ادامه بحث، فرمولهایی را در نظر می‌گیریم که فقط با استفاده از ادات ترکیب $\wedge$، $\vee$، $\neg$، و سورهای $\forall$ و $\exists$ ساخته می‌شوند. ولی مجاز به استفاده از ادات ترکیبی $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ نمی‌باشیم.

تعریف ۱.۴.۱. به فرمولی نرمال منفی (nnf) می‌گوییم که از فرمولهای اتمی و نقیض اتمی با استفاده از $\wedge$ و $\vee$ و $\exists$ و $\forall$ ساخته شده باشد.

گزاره ۲.۴.۱. *هر فرمول مرتبه اول φ معادل با یک ψ فرمول nnf است.*

برهان. قرار دهید φ یک فرمول مرتبه اول دلخواه باشد. فرمول nnf آن را با چندین بار استفاده کردن از هم‌ارزیهای زیر محاسبه می‌کنیم (از چپ به راست):

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$
$$\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

$\square$

مثال ۳.۴.۱. فرمول nnf عبارت $\forall x(\forall yP(x,y) \vee Q(x)) \to \exists zP(x,z)$ را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\forall x(\forall yP(x,y) \vee Q(x)) \to \exists zP(x,z) \equiv$$
$$\neg(\forall x(\forall yP(x,y) \vee Q(x))) \vee \exists zP(x,z) \equiv$$
$$\exists x(\exists y\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists zP(x,z).$$

تعریف ۴.۴.۱. با استقراء روی پیچیدگی فرمولها، مجموعه‌های $Rel^+(\varphi)$ و $Rel^-(\varphi)$ را تعریف می‌کنیم:

$Rel^+(R) = \{R\}; Rel^-(R) = \emptyset$ (برای هر R اتمی)

$Rel^-(x=y) = Rel^+(x=y) = \emptyset.$

$Rel^+(\varphi \wedge \psi) = Rel^+(\varphi) \cup Rel^+(\psi); Rel^-(\varphi \wedge \psi) = Rel^-(\varphi) \cup Rel^-(\psi).$

$Rel^+(\varphi \vee \psi) = Rel^+(\varphi) \cup Rel^+(\psi); Rel^-(\varphi \vee \psi) = Rel^-(\varphi) \cup Rel^-(\psi).$

$Rel^+(\exists x\varphi(x)) = Rel^+(\varphi(x)); Rel^-(\exists x\varphi(x)) = Rel^-(\varphi(x)).$

$Rel^+(\forall x\varphi(x)) = Rel^+(\varphi(x)); Rel^-(\forall x\varphi(x)) = Rel^-(\varphi(x)).$

$Rel^+(\neg\varphi) = Rel^-(\varphi); Rel^-(\neg\varphi) = Rel^+(\varphi).$

تعریف ۵.۴.۱. یک رابطه R در φ **مثبت ظاهر می‌شود** هرگاه $R \in Rel^+(\varphi)$، و **منفی ظاهر می‌شود** هرگاه $R \in Rel^-(\varphi)$.

تذکر ۶.۴.۱. دلیل اینکه نمی‌خواهیم از ادات ترکیبی $\to$ و $\leftrightarrow$ استفاده کنیم، این است که شامل نمادهای منفی «پنهان» می‌باشند. برای مثال، جمله $P(c) \to Q(c)$ کوته‌نوشت جمله

$\neg(P(c) \wedge \neg Q(c))$ می‌باشد، بنابراین P منفی ظاهر می‌شود در حالیکه در جمله اول مثبت به نظر می‌آید، و ثابت c به دو صورت مثبت و منفی در آن ظاهر می‌شود.

تعریف ۷.۴.۱. قرار دهید S مجموعه‌ای از مجموعه‌های شمارش‌پذیر جملات $\mathcal{L}'$ باشد (توسیع $\mathcal{L}'$ از $\mathcal{L}$ را با اضافه کردن یک مجموعه شمارش‌پذیر C از نمادهای ثابت جدید بدست می‌آوریم). می‌گوییم S خاصیت سازگاری دارد اگر و تنها اگر برای هر $s \in S$، همه شرایط زیر برقرار باشد (φ فرمولی در $\mathcal{L}'$ است):

(C۱) یا $\varphi \notin s$ یا $\neg\varphi \notin s$.

(C۲) اگر $(\neg\varphi) \in s$ آنگاه $s \cup \{\neg\varphi\} \in S$.

(C۳) اگر $(\bigwedge \Phi) \in s$ آنگاه برای هر $\varphi \in \Phi$، $s \cup \{\varphi\} \in S$.

(C۴) اگر $(\forall x \varphi(x)) \in s$، آنگاه برای هر $c \in C$، $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$.

(C۵) اگر $(\bigvee \Phi) \in s$ آنگاه برای بعضی $\varphi \in \Phi$، $s \cup \{\varphi\} \in S$.

(C۶) اگر $(\exists x \varphi(x)) \in s$، آنگاه برای هر $c \in C$، $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$.

(C۷) قرار دهید t یک ترم باشد و $c, d \in C$.

اگر $(c = d) \in s$، آنگاه $s \cup \{d = c\} \in S$.

اگر $c = t$، $\varphi(t) \in s$، آنگاه $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$.

برای بعضی $e = c$، $s \cup \{e = t\} \in S$.

حال به بیان و اثبات قضیه لیندون می‌پردازیم:

قضیه ۸.۴.۱. *(قضیه درونیابی لیندون)*
φ و ψ را جملاتی در $\mathcal{L}'$ در نظر بگیرید که $\varphi \models \psi$. آنگاه یک جمله θ از $\mathcal{L}'$ وجود دارد بطوریکه

(i) *$\psi \models \theta$ و $\theta \models \varphi$.*

(ii) *هر نماد رابطه‌ای که در θ بصورت مثبت (منفی) ظاهر می‌شود، در هر دوی φ و ψ نیز بصورت مثبت (منفی) ظاهر می‌شود. (یعنی، $Rel^{+}(\theta) \subseteq Rel^{+}(\varphi) \cap Rel^{+}(\psi)$ و $Rel^{-}(\theta) \subseteq Rel^{-}(\varphi) \cap Rel^{-}(\psi)$).*

یک مثال ساده که نشان می‌دهد ما نمی‌توانیم یک درونیابی θ برای نمادهای ثابت پیدا کنیم که در شرط (ii) صدق کند، عبارت است از

$$(\exists x)(x = c \wedge \neg R(x)) \models \neg R(c).$$

توجه کنید که c در طرف چپ مثبت و در طرف راست منفی است، اما باید در هر درونیابی ظاهر شود.

برهان. برای هر جمله σ از $\mathcal{L}'$، X_σ را مجموعه‌ای از همه جملات θ از $\mathcal{L}'$ قرار می‌دهیم بطوریکه حداکثر تعداد متناهی $c \in C$ در θ ظاهر شود، و هر نماد رابطه‌ای که در θ بصورت مثبت (منفی) ظاهر می‌شود در σ نیز بصورت مثبت (منفی) ظاهر می‌شود؛ و X_φ را مجموعه‌ای از همه جملات φ' از $\mathcal{L}'$ قرار می‌دهیم بطوریکه هر نماد رابطه‌ای که در φ' بصورت مثبت (منفی) ظاهر می‌شود در φ نیز بصورت مثبت (منفی) ظاهر شود و همواره حداکثر تعداد متناهی $c \in C$ در φ' ظاهر شود. X_ψ و $X_{\neg\varphi}$ و $X_{\neg\psi}$ را مشابهاً تعریف می‌کنیم.
قرار دهید S مجموعه‌ای از همه مجموعه‌های متناهی $s \subset X_\varphi \cup X_{\neg\psi}$ باشد که می‌تواند بصورت اجتماع $s = s_۱ \cup s_۲$ نوشته شود بطوریکه

(۱) $s_۱ \subset X_\varphi$ و $s_۲ \subset X_{\neg\psi}$.

(۲) اگر $\theta_۱ \in X_\varphi \cap X_\psi$ و $\theta_۲ \in X_{\neg\varphi} \cap X_{\neg\psi}$، و $\models \bigwedge s_۱ \to \theta_۱$ و $\models \bigwedge s_۲ \to \theta_۲$، آنگاه $\theta_۱ \wedge \theta_۲$ سازگار است.

ادعا می‌کنیم S خاصیت سازگاری دارد. قرار می‌دهیم $s = s_۱ \cup s_۲ = S$ و فرض می‌کنیم که $(C۱)$ برقرار نباشد، و هر دوی σ و $\neg\sigma$ متعلق به S باشد. اگر $\sigma \in s_۱$ و $(\neg\sigma) \in s_۲$، آنگاه داریم: $\theta_۱ = \sigma$ و $\theta_۲ = \neg\sigma$ پس شرط (۲) برقرار نیست. اگر $(\neg\sigma) \in s_۱$ باشد، آنگاه (۲) زمانیکه $\theta_۱$ برابر $(\neg c = c)$ و $\theta_۲$ برابر $(c = c)$ باشد، به تناقض می‌رسد. بنابراین، $(C۱)$ برقرار است.
برای اثبات $(C۷)$، فرض کنید که $S = s_۱ \cup s_۲ = s$ و t یک ترم باشد و $c \in C$، و $(c = t)$، $\sigma(t) \in s$. بایستی نشان دهیم که $s \cup \{\sigma(c)\} \in S$. ابتدا فرض می‌کنیم که $(c = t)$ و $\sigma(t) \in s_۱$. آنگاه $\models \bigwedge s_۱ \to \sigma(c)$ و $\sigma(c) \in X_\varphi$. از اینرو، نتیجه می‌شود که $s \cup \{\sigma(c)\} \in S$. قرار می‌دهیم: $s'_۱ = s_۱ \cup \{\sigma(c)\}$، $s'_۲ = s_۲$. حال فرض می‌کنیم که $\sigma(t) \in s_۱$ و $c = t \in s_۲$. آنگاه

$$.\models \bigwedge s_1 \to (c = t \to \sigma(c)) \quad , \quad \sigma(c) \in X_\varphi$$

قرار دهید $s'_1 = s_1 \cup \{\sigma(c)\}$ و $s'_2 = s_2$، و فرض کنید $\theta_1 \in X_\varphi \cap X_\psi$ و $\theta_2 \in X_{\neg\varphi} \cap X_{\neg\psi}$ و

$$.\models \bigwedge s'_1 \to \theta_1 \quad , \quad \models \bigwedge s'_2 \to \theta_2$$

آنگاه

$$.\models \bigwedge s_1 \to (c = t \to \theta_1) \quad , \quad \models \bigwedge s_2 \to (c = t \wedge \theta_2)$$

از اینرو،

$$(c = t \to \theta_1) \wedge (c = t \wedge \theta_2)$$

سازگار است، پس $\theta_1 \wedge \theta_2$ سازگار است. اثبات $(C2) - (C6)$ بستگی به این حقیقت دارد که اگر یک نماد رابطه‌ای در σ مثبت (منفی) ظاهر شود و اگر $\sigma \in \Sigma$، آنگاه همواره نمادها بصورت مثبت (منفی) در $nnf(\neg\sigma)$، $\bigwedge \Sigma$، $\forall x\sigma$، $\bigvee \Sigma$ و $\exists x\sigma$ ظاهر می‌شود.

طبق قضیه وجود مدل، هر $s \in S$ یک مدل دارد، بنابراین، $\{\varphi, \neg\psi\} \notin S$. از اینرو جملات $\theta_1(c_1, \cdots, c_n)$ در $X_\varphi \cap X_\psi$ و $\theta_2(c_1, \cdots, c_n)$ در $X_{\neg\varphi} \cap X_{\neg\psi}$ وجود دارد بطوریکه

$$.\models \varphi \to \theta_1 \ , \models \neg\psi \to \theta_2 \ , \models \neg(\theta_1 \wedge \theta_2)$$

پس جمله

$$\theta = \forall x_1, \cdots, x_n \theta(x_1, \cdots, x_n)$$

از $\mathcal{L}'$ دارای خواص $(i) - (ii)$ می‌باشد. □

حال، قضیه درونیابی لیندون را زمانیکه زبان $\mathcal{L}$ شامل نمادهای تابعی و ثوابت نباشد، اثبات می‌کنیم:

قضیه ۹.۴.۱. *(قضیه درونیابی لیندون بدون تساوی)*

فرض کنید $\mathcal{L}$ شامل نمادهای تابعی و ثوابت نباشد. φ و ψ را جملاتی از $\mathcal{L}'$ بگیرید که نماد تساوی در آن ظاهر نشده است، و $\models \psi$؛ و $\models \neg\varphi$ و $\models \psi$ هیچکدام برقرار نباشد؛ آنگاه جمله θ از $\mathcal{L}'$ وجود دارد که نماد تساوی در آن ظاهر نشده است و در شرایط $(i) - (ii)$ قضیه قبلی صدق می‌کند.

برهان. نمادها همان نمادهای قضیه قبلی می‌باشد. تعریف می‌کنیم Y مجموعه‌ای از همه جملات $\theta \in X_\sigma$ باشد که نماد تساوی در آن ظاهر نشده است. S را مجموعه‌ای از همه مجموعه‌های متناهی $s \subset Y_\varphi \cup Y_{\neg\psi}$ در نظر می‌گیریم که می‌توان بصورت $s = s_۱ \cup s_۲$ نوشت که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند و Y بجای X می‌نشیند و $s_۱$ و $s_۲$ هر دو سازگارند. (S در خواص سازگاری $(C۱) - (C۶)$ طبق قبل برقرار است). بعلاوه، هیچ عضو S شامل نماد تساوی نیست. طبق قضیه وجود مدل، هر $s \in S$ دارای مدل است. بنابراین، از آنجا که، $\{\varphi, \neg\psi\}$ مدل ندارد، پس، $\{\varphi, \neg\psi\} \notin S$. علاوه بر این، طبق فرضیه سازگاری، $(\neg\psi)$ سازگار است. پس جمله θ از $\mathcal{L}'$ بدون تساوی وجود دارد که در خواص $(ii) - (i)$ صدق می‌کند. □

۵.۱ قضیه درونیابی چندگونه

در ریاضیات غیر رسمی گاهی به چنین عبارتهایی برمی‌خوریم: الفبای یونانی را برای اردینالها، حروف بزرگ لاتین را برای مجموعه‌هایی از اعداد، و... بکار می‌بریم. در واقع، بدین وسیله چند گونه متغیر را می‌پذیریم که هر گونه جهانی مخصوص به خود دارد.

فرض کنیم یک مجموعه ناتهی I در اختیار داریم که هر عضو آن یک گونه نامیده می‌شود. جهان یک ساختار چندگونه $\mathfrak{A}$ با گونه‌های I یک مجموعه Aی می‌باشد که به مجموعه‌های مجزای $\{A_i : i \in I\}$ افراز شده است:

$$.A = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$$

ساختار چندگونه $\mathfrak{A}$ تابعی روی مجموعه پارامترهاست که به هر یک از آنها شیئی را با گونه درست نسبت می‌دهد:

(۱) برای هر نماد محمولی R از گونه $\langle i_۱, \ldots, i_n\rangle$، $\mathfrak{A}$ رابطه زیر را مشخص می‌کند:

$$.R^{\mathfrak{A}} \subseteq A_{i_۱} \times \ldots \times A_{i_n}$$

(۲) برای هر نماد تابعی f از گونه $\langle i_۱, \ldots, i_n, i_{n+۱}\rangle$، $\mathfrak{A}$ تابع زیر را مشخص می‌کند:

$$.f^{\mathfrak{A}} : A_{i_۱} \times \ldots \times A_{i_n} \to A_{i_{n+۱}}$$

(۳) برای هر نماد ثابت c از گونه $\langle i \rangle$، $\mathfrak{A}$ یک نقطه $c^{\mathfrak{A}}$ در A_i را معین می‌کند.

۱.۵.۱ تحویل به یک منطق تک‌گونه

زبانهای چندگونه گاهی می‌توانند تسهیلاتی فراهم آورند. اما هر کار اساسی که به کمک آنها انجام دهیم، بدون آنها نیز می‌توان انجام داد.

یک زبان تک‌گونه، همراه با تمامی نمادهای محمولی و ثابت، و تابعی مربوط به زبان چندگونه را در نظر می‌گیریم. علاوه بر آن، این زبان دارای یک نماد محمولی تک موضعی U_i، به ازای هر $i \in I$ خواهد بود. یک ترجمه نحوی وجود دارد که هر فرمول چندگونه φ را به یک فرمول تک‌گونه φ_* منتقل می‌سازد. تنها تغییر در سورهاست. به ازای هر گونه مانند $\langle i \rangle$، متغیرهای $v_۱^i, v_۲^i, \ldots$ مربوط به گونه $\langle i \rangle$ می‌باشند؛ ما

$$\forall_i v_n^i \psi(v_n^i)$$

را به

$$\forall v (U_i v \to \psi(v))$$

تبدیل می‌کنیم که در آن v متغیری است که برای جلوگیری از ایجاد تعارض با متغیرهای دیگر انتخاب می‌شود. بنابراین سورهای مربوط به گونه $\langle i \rangle$ به U_i نسبی‌سازی می‌شوند.

حال به معناشناسی برمی‌گردیم؛ می‌توانیم ساختار چندگونه $\mathfrak{A}$ را به یک ساختار $\mathfrak{A}^*$ در زبان تک‌گونه بالا برگردانیم. جهان A^* عبارت است از اجتماع همه جهانهای مربوط به $\mathfrak{A}$، یعنی $\bigcup_{i \in I} A_i$. U_i توسط مجموعه A_i معین می‌شود. در مورد نمادهای محمولی و ثابت، $\mathfrak{A}^*$ با $\mathfrak{A}$ توافق دارد. برای نماد تابعی مانند f، تابع $f^{\mathfrak{A}^*}$ توسیع دلخواهی از $f^{\mathfrak{A}}$ است. (البته این بطور کامل $f^{\mathfrak{A}^*}$ را مشخص نمی‌کند. نتیجه بدست آمده برای $\mathfrak{A}^*$، برای هر ساختار که با این روش شرح داده شده بدست آمده، برقرار است.)

یک ساختار تک‌گونه را همیشه نمی‌توان به یک ساختار چندگونه تبدیل کرد. بنابراین برخی شرایط را منظور می‌کنیم. قرار دهید Φ مجموعه‌ای شامل جملات تک‌گونه زیر باشد:

(۱) به ازای هر $i \in I$، $\exists v U_i v$.

(۲) به ازای هر نماد تابعی f از گونه $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$،

$$\forall v_1 \ldots v_n (U_{i_1} v_1 \to \ldots \to U_{i_n} v_n \to U_{i_{n+1}} f v_1 \ldots v_n).$$

حالا $n = 0$ را در نظر می‌گیریم: در این حالت، فرمول بالا، به ازای هر نماد ثابت c از گونه $\langle i \rangle$، بصورت $U_i c$ در می‌آید.

توجه کنید که $\mathfrak{A}^*$ مدلی برای Φ است. پس یک مدل تک‌گونه $\mathfrak{B}$ از Φ به یک مدل چندگونه $\mathfrak{B}^\sharp$ تبدیل می‌شود. این تبدیل بصورت زیر انجام می‌گیرد:

(۱) $B_i^\sharp = U_i^{\mathfrak{B}}$؛

(۲) $R^{\mathfrak{B}^\sharp} = R^{\mathfrak{B}} \cap (U_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \ldots \times U_{i_n}^{\mathfrak{B}})$، که R یک نماد محمولی از گونه $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ می‌باشد؛

(۳) $c^{\mathfrak{B}^\sharp} = c^{\mathfrak{B}}$؛

(۴) $f^{\mathfrak{B}^\sharp} = f^{\mathfrak{B}} \cap (U_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \ldots \times U_{i_n}^{\mathfrak{B}} \times U_{i_{n+1}}^{\mathfrak{B}})$، تحدید $f^{\mathfrak{B}}$ به $U_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \ldots \times U_{i_n}^{\mathfrak{B}}$ است که در آن f یک نماد تابعی از گونه $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$ است.

قرار دهید φ فرمولی در یک زبان چندگونه $\mathcal{L}$، بدون نمادهای تابعی و ثوابت، و نماد تساوی باشد. تعاریفی را بصورت زیر بیان می‌کنیم، که x^i یک متغیر از گونه $\langle i \rangle$ است. $nnf(\varphi)$ را صورت نرمال منفی φ در نظر می‌گیریم. $Un(\varphi)$ و $Ex(\varphi)$ را به ترتیب مجموعه‌ای از $i \in I$ تعریف می‌کنیم بطوریکه یک متغیر گونه $\langle i \rangle$ بصورت عمومی و وجودی در $nnf(\varphi)$ ظاهر شود. $Sort(\varphi)$ مجموعه‌ای از متغیرهای گونه‌های ظاهر شده در φ را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۵.۱. $Un(\varphi)$ و $Ex(\varphi)$، را با شرایط زیر تعریف می‌کنیم:

$Un(R) = Ex(R) = \emptyset$. (برای هر R اتمی)

$Un(\varphi \wedge \psi) = Un(\varphi) \cup Un(\psi); Ex(\varphi \wedge \psi) = Ex(\varphi) \cup Ex(\psi).$

$Un(\varphi \vee \psi) = Un(\varphi) \cup Un(\psi); Ex(\varphi \vee \psi) = Ex(\varphi) \cup Ex(\psi).$

$Un(\exists x^i \varphi(x^i)) = Un(\varphi(x^i)); Ex(\exists x^i \varphi(x^i)) = Ex(\varphi(x^i)) \cup \{i\}.$

$Un(\forall x^i \varphi(x^i)) = Un(\varphi(x^i)) \cup \{i\}; Ex(\forall x^i \varphi(x^i)) = Ex(\varphi(x^i)).$

$Un(\neg \varphi) = Ex(\varphi); Ex(\neg \varphi) = Un(\varphi).$

قضیه درونیابی چندگونه به صورت زیر است:

قضیه ۱.۵.۲. (درونیابی چندگونه)
فرض کنید φ و ψ فرمولهای رابطه‌ای چندگونه باشند. اگر $\varphi \models \psi$ یک ترکیب شرطی معتبر باشد، آنگاه یک درونیابی چندگونه θ وجود دارد بطوریکه $\varphi \models \theta$ و $\theta \models \psi$، و نیز

(i) $Rel^+(\theta) \subseteq Rel^+(\varphi) \cap Rel^+(\psi)$,

$Rel^-(\theta) \subseteq Rel^-(\varphi) \cap Rel^-(\psi)$;

(ii) $Sort(\theta) \subseteq Sort(\varphi) \cap Sort(\psi)$;

(iii) $Un(\theta) \subseteq Un(\varphi) \cap Un(\psi)$,

$Ex(\theta) \subseteq Ex(\varphi) \cap Ex(\psi)$.

این قضیه، کاربردی از قضیه اصلی این پایان‌نامه می‌باشد، که بعداً نشان خواهیم داد.

فصل ۲

قضیه درونیابی جدید

۱.۲ تعاریف و اصطلاحات

تعریف ۱.۱.۲. منطق مرتبه اول با تساوی یا بدون تساوی را بطور کلی با زبان متناهی τ که در آن ثوابت بولی $\top$ و $\bot$ فرمولهای اتمی مرتبه اول هستند، نشان می‌دهیم.
از مجموعه $Occ = \tau \times \{+,-\}$ برای قطبی‌سازی محمولات ظاهر شده در فرمول، بواسطه نگاشت

$$occ : \varphi \longmapsto occ(\varphi) \subseteq Occ،$$

استفاده می‌کنیم، که $(R,+) \in occ(\varphi)$ اگر R در φ مثبت ظاهر شود و $(R,-) \in occ(\varphi)$ اگر R در φ منفی ظاهر شود. (تعریف (۴.۴.۱) و (۵.۴.۱) را ببینید.)

تعریف ۲.۱.۲. قرار دهید x و y و z متغیرهای مجزا باشند. فرمول زیر را

$$\varphi := \exists x(\psi(\underline{y}, \underline{z}) \wedge \forall y(\theta(\underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}) \vee \eta(\underline{\underline{y}}, \underline{z})))$$

که در آن ψ و θ و η بدون سور هستند، در نظر بگیرید. متغیرهای ظاهر شده y و z که فقط با یک خط زیرین مشخص شده‌اند، سورگذاری نشده‌اند، یعنی، در حوزه تعریف بدون سور هستند. به چنین رخدادهایی آزاد گفته می‌شود. متغیرهای x و y که با دو خط زیرین مشخص شده‌اند، رخدادهای بسته (وابسته) نامیده می‌شوند. (بنابراین y در φ هم دارای رخداد آزاد و هم دارای رخداد بسته می‌باشد.)

با استقراء روی فرمولها، مجموعه متغیرهای آزاد در فرمول φ را تعریف می‌کنیم و این مجموعه را با $free(\varphi)$ نشان می‌دهیم:

تعریف ۳.۱.۲. $free(\varphi)$ را با استقراء بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$free(\varphi) = \text{مجموعه متغیرهای ظاهر شده در } \varphi \quad (\text{برای } \varphi \text{ اتمی})$$

$$free(\neg\varphi) := free(\varphi);$$

$$free((\varphi * \psi)) := free(\varphi) \cup free(\psi) \quad (* = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow);$$

$$free(\forall x\varphi) := free(\varphi) - \{x\};$$

$$free(\exists x\varphi) := free(\varphi) - \{x\}.$$

مثال ۴.۱.۲. قرار دهید x و y و z متغیرهای مجزا باشند. داریم:

$$\begin{aligned} free((x = y \to \forall y\,(\neg y = z))) &= free(x = y) \cup free(\forall y\,(\neg y = z)) \\ &= \{x, y\} \cup (free(\neg y = z) - \{y\}) \\ &= \{x, y\} \cup (\{y, z\} - \{y\}) = \{x, y, z\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$، را به ترتیب τ-ساختارهایی با جهان‌های A و B فرض می‌کنیم.

قضیه ۵.۱.۲. *زبانهای مرتبه اول τ و $\tau_\circ$ را با شرط $\tau_\circ \subseteq \tau$ در نظر می‌گیریم. قرار دهید $\mathfrak{A}$ یک τ-ساختار و R یک نماد رابطه‌ای تک موضعی در τ باشد. قرار دهید $R^{\mathfrak{A}}$ دامنه‌ای از یک زیرساختار $\mathfrak{A}|\tau_\circ$ باشد، که این زیرساختار را $\mathfrak{A}_R$ می‌نامیم. آنگاه برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ در $\tau_\circ$ یک فرمول $\varphi^R(\bar{x})$ در τ وجود دارد بطوریکه در شرط زیر صدق می‌کند:*

اگر $\mathfrak{A}$ یک τ-ساختار باشد بطوریکه $\mathfrak{A}_R$ تعریف شده باشد، و $\bar{a}$ دنباله‌ای از عناصر $\mathfrak{A}_R$ باشد، آنگاه

$$\mathfrak{A}_R \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi^R(\bar{a}).$$

برهان. φ^R را با استقراء روی پیچیدگی فرمول φ تعریف می‌کنیم:

وقتی φ اتمی باشد: $\varphi^R := \varphi$

$$(\textstyle\bigwedge_{i\in l} \varphi)^R := \bigwedge_{i\in l}(\varphi^R) \quad , \quad (\bigvee_{i\in l} \varphi)^R := \bigvee_{i\in l}(\varphi^R)$$

$$(\neg\varphi)^R := \neg(\varphi^R)$$

$$(\forall y\, \varphi(\bar{x}, y))^R := \forall y(Ry \to \varphi^R(\bar{x}, y))$$

$$(\exists y\, \varphi(\bar{x}, y))^R := \exists y(Ry \wedge \varphi^R(\bar{x}, y))$$

فرمول φ^R را R-نسبی‌شده فرمول φ می‌گوییم. اگر φ از مرتبه اول باشد آنگاه φ^R نیز مرتبه اول است. □

تعریف ۶.۱.۲. قرار دهید $\mathbb{U}$ یک چندتایی از محمولات تک موضعی معین شده U، در τ باشد. می‌گوییم که فرمول φ، $\mathbb{U}$-نسبی‌شده است، اگر هر سور در φ صریحاً به یک $U \in \mathbb{U}$ نسبی‌سازی شود، یعنی، برای یک U در $\mathbb{U}$ بصورت $\exists x(Ux \wedge \ldots)$ یا $\forall x(Ux \to \ldots)$ باشد.

فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده دقیقاً متناظر با فرمول مرتبه اول $\bigcup_{U\in\mathbb{U}} U$ نسبی‌سازی شده است. در واقع حتی تا یک شکل محدود از هم‌ارزی‌های منطقی که قطبی‌سازی محمولات ظاهر شده را حفظ می‌کند، درست است.

مثال ۷.۱.۲. اگر فضای برداری را بعنوان یک ساختار تک‌گونه در نظر بگیریم، آنگاه دامنه آن شامل اسکالرها و بردارها است. هنگام بیان اصول موضوعه فضای برداری در زبان مربوطه، اول بایستی اصول موضوعه میدان را به اسکالرها و اصول موضوعه گروه را به مجموعه بردارها نمایش دهیم. $\forall x\,(x\cdot ۱ = x)$ یک اصل موضوعه میدان می‌باشد که می‌تواند توسط نماد رابطه‌ای $\underline{F}$ برای مجموعه اسکالرها استفاده شود و اصل موضوعه بصورت فرمول $\forall x(\underline{F}x \to x\cdot ۱ = x)$ نوشته می‌شود. مشابهاً $\varphi := \forall x(x = ۰ \vee x = ۱)$، زمانیکه به $\underline{F}$ نسبی‌شده، تبدیل می‌شود به

$$.\varphi^{\underline{F}} := \forall x(\underline{F}x \to (x = ۰ \vee x = ۱))$$

در یک فضای برداری، $\varphi^{\underline{F}}$ بیان می‌کند که اسکالرهای میدان در φ صدق می‌کنند.

ما می‌خواهیم برای اثبات قضیه درونیابی از روش لیندون استفاده کنیم.

قضیه ۸.۱.۲. *قرار دهید φ و ψ فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده باشد بطوریکه $\varphi \models \psi$. آنگاه یک درونیابی لیندون $\mathbb{U}$-نسبی‌شده χ برای $\varphi \models \psi$، وجود دارد، یعنی، یک فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده χ وجود دارد بطوریکه:*

$(i)\ free(\chi) \subseteq free(\varphi) \cap free(\psi).$

$(ii)\ occ(\chi) \subseteq occ(\varphi) \cap occ(\psi).$

$(iii)\ \varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi.$

قضیه فوق دو تعبیر دارد، یکی برای منطق مرتبه اول با تساوی و دیگری برای منطق اول بدون تساوی. قضیه درونیابی لیندون (با تساوی یا بدون تساوی) را می‌توان توسط یک نسبی‌سازی جزئی، قویتر کرد.

قضیه ۹.۱.۲. (*درونیابی لیندون*)

فرض کنید برای فرمولهای φ و ψ داریم $\varphi \models \psi$. در اینصورت یک درونیابی لیندون χ برای $\varphi \models \psi$ وجود دارد بطوریکه:

$(i)\ free(\chi) \subseteq free(\varphi) \cap free(\psi).$

$(ii)\ occ(\chi) \subseteq occ(\varphi) \cap occ(\psi).$

(iii) $\varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi.$

این قضیه را می‌توان از قضیه (۸.۱.۲) نتیجه گرفت، اگر برای یک U تک موضعی جدید، قرار دهیم $\hat{\tau} = \tau \dot\cup \{U\}$، $\mathbb{U} = \{U\}$ و نسبی‌سازی φ و ψ به U را، $\hat{\varphi}$ و $\hat{\psi}$ در نظر می‌گیریم. با این قضیه، یک درونیاب لیندون U-نسبی‌شده $\hat{\chi}$ برای $\bigwedge U\mathbf{x} \wedge \hat{\varphi} \models \hat{\psi}$ وجود دارد. اینجا $\bigwedge U\mathbf{x}$ کوته‌نوشت نماد $\bigwedge_{i=0}^{n} Ux_i$ است که $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ شامل همه متغیرهای آزاد در φ یا ψ می‌باشد. χ یک درونیاب لیندون موردنظر برای $\varphi \models \psi$ است که با جایگزین کردن هر اتم بصورت Uy در $\hat{\chi}$ با $\top$ بدست می‌آید.

حال به اثبات قضیه (۸.۱.۲) می‌پردازیم و قبل از اثبات اصطلاحات و نمادهایی را معرفی می‌کنیم. موارد با تساوی و بدون تساوی را با هم می‌توان بررسی کرد. در واقع، مورد تساوی نیاز به تنها یک تغییر جزئی روشمند دارد که بلافاصله نشان داده خواهد شد.

تعریف ۱۰.۱.۲. τ را زبان مرتبه اول در نظر بگیرید. قرار دهید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ یک τ-ساختار باشند. همریختی F از A به B را با نماد $F : A \to B$ نشان می‌دهیم. این تابع دارای خواص زیر است:

(۱) برای هر ثابت c در زبان τ، $F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

(۲) برای هر نماد رابطه‌ای n-موضعی R در زبان τ، اگر $(a_1, \cdots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ آنگاه $(F(a_1), \cdots, F(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

(۳) برای هر نماد تابعی m-موضعی f در زبان τ و هر $(a_1, \cdots, a_m) \in A$،

$$F(f^{\mathfrak{A}})(a_1, \cdots, a_m) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \cdots, F(a_m))$$

تعریف ۱۱.۱.۲. همریختی $F : A \to B$ را یکریختی بین τ-ساختارهای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ گویند، اگر F یک‌به‌یک و پوشا باشد و برای هر نماد رابطه‌ای n-موضعی R در زبان τ،

$$(F(a_1), \cdots, F(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow (a_1, \cdots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

یکریخت بودن $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را با $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ نشان می‌دهیم.

مفهوم‌های همریختی و یکریختی، مفهوم‌های معنایی هستند، یعنی رابطه‌ای بین ساختارها.

تعریف ۱۲.۱.۲. قرار دهید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ یک τ-ساختار باشند و ρ یک نگاشت باشد. ρ یک یکریختی جزئی از $\mathfrak{A}$ به $\mathfrak{B}$ است اگر و تنها اگر $dm(\rho) \subset A$ و $im(\rho) \subset B$، و ρ خواص زیر را داشته باشد:

(a) ρ یک به یک باشد.

(b) ρ یک همریختی با شرایط زیر باشد:

۱. برای $R \in \tau$ و $a_0, \ldots, a_{n-1} \in dm(\rho)$،

$$R^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\rho(a_0), \ldots, \rho(a_{n-1})).$$

۲. برای $f \in \tau$ و $(a_0, \ldots, a_{n-1}), a \in dm(\rho)$،

$$f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a \Leftrightarrow f^{\mathfrak{B}}(\rho(a_0), \ldots, \rho(a_{n-1})) = \rho(a).$$

۳. برای هر $c \in \tau$ و $a \in dm(\rho)$،

$$c^{\mathfrak{A}} = a \Leftrightarrow c^{\mathfrak{B}} = \rho(a).$$

برخی از زیرمجموعه‌های خاص $p \subseteq A \times B$ را به عنوان یکریختی‌های جزئی در نظر می‌گیریم. این مفهوم نیازمند اصلاحی اساسی است اگر ما بخواهیم تساوی را منظور بکنیم: فقط در این صورت، تمام pهای تحت بررسی، گرافهای توابع جزئی یک به یک هستند. در حالت بدون تساوی، ما زیرمجموعه‌های دلخواه قبلی $A \times B$ را در نظر می‌گیریم.

اگر $p \subseteq A \times B$، آنگاه دامنه و برد p را به ترتیب بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$dm(p) = \{a \in A \mid (\exists b \in B)((a, b) \in p)\}$$
$$im(p) = \{b \in B \mid (\exists a \in A)((a, b) \in p)\}$$

اگر $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ و اگر $(a_i, b_i) \in p$ برای $i = 1, \dots, n$، این حالت را بصورت ساده با نوشتن $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۲. برای $O \subseteq Occ$، می‌گوییم p، O را حفظ می‌کند اگر برای هر $R \in \tau$، اگر R، n-موضعی باشد، و اگر $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{b} \in B^n$ طوری باشند که $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p$، آنگاه:

- اگر $(R, +) \in O$: $\mathfrak{A} \models R\mathbf{a} \Longrightarrow \mathfrak{B} \models R\mathbf{b}$،
- اگر $(R, -) \in O$: $\mathfrak{B} \models R\mathbf{b} \Longrightarrow \mathfrak{A} \models R\mathbf{a}$.

اگر $O \subseteq Occ$ و $\mathfrak{A} = (A, (U^{\mathfrak{A}})_{U \in \mathbb{U}}, \dots)$، $A^{+/O}$ و $A^{-/O}$ را قسمتهایی از جهان A در نظر می‌گیریم که شامل $U^{\mathfrak{A}}$هایی هستند که به ترتیب نسبت به O مثبت و منفی می‌باشند:

$$A^{+/O} = \bigcup_{(U,+) \in O} U^{\mathfrak{A}} \ \ , \ \ A^{-/O} = \bigcup_{(U,-) \in O} U^{\mathfrak{A}}.$$

تعریف ۱۴.۱.۲. مجموعه $P \subseteq \{p \subseteq A \times B \mid O \text{ ،}p \text{ را حفظ می‌کند}\}$[1] یک سیستم پس و پیش نسبت به O و $\mathbb{U}$ است، اگر $P \neq \emptyset$ باشد بطوریکه برای هر $p \in P$ و هر $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p$:

- اگر $a \in A^{+/O}$ ، آنگاه وجود دارند $p' \in P$ و $b \in B$ بطوریکه $\mathbf{a}a\mathbf{b}b \in p'$.
- اگر $b \in B^{-/O}$، آنگاه وجود دارند $p' \in P$ و $a \in A$ بطوریکه $\mathbf{a}a\mathbf{b}b \in p'$.

آنچه در زیر می‌آید دو مفهوم مرتبط به هم و نامتقارن در مورد شباهت بین ساختارها هستند که یکی روح جبری دارد و دیگری روح معناشناسی. رابطه آنها با همدیگر همچون رابطه یکریختی‌های جزئی و هم‌ارزی‌های مقدماتی هستند.

تعریف ۱۵.۱.۲. می‌نویسیم $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$، اگر یک سیستم پس و پیش P نسبت به O و $\mathbb{U}$ با $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p$ برای یک $p \in P$ وجود داشته باشد. در این حالت همواره می‌نویسیم $P : (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ و اگر P تشکیل شده از یک عنصر واحد $p \subseteq A \times B$ باشد، می‌نویسیم $p : (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$.

[1] یادآوری می کنیم که برای حالت با تساوی، این p به توابع جزئی یک به یک محدود می‌شود.

تعریف ۱۶.۱.۲. می نویسیم $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$، اگر برای همه فرمولهای $\mathbb{U}$-نسبی‌شده $\varphi(\mathbf{x})$ با $occ(\varphi) \subseteq O$ داشته باشیم: $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathbf{a}] \implies \mathfrak{B} \models \varphi[\mathbf{b}]$. برای $p \subseteq A \times B$، می‌نویسیم: $p : \mathfrak{A} \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} \mathfrak{B}$، اگر $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ برای هر $\mathbf{a}\ \mathbf{b} \in p$.

لم ۱۷.۱.۲. *اگر* $P : \mathfrak{A} \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} \mathfrak{B}$ *آنگاه* $p : \mathfrak{A} \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} \mathfrak{B}$ *برای هر* $p \in P$.
بویژه، فرض $(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}) \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$، *حکم* $(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ *را نتیجه می‌دهد.*

برهان. اگر $nnf(\varphi)$ را φ^* در نظر بگیریم، مستقیماً با استقراء روی صورت نرمال منفی φی $\mathbb{U}$-نسبی شده با $occ(\varphi) \subseteq O$ اثبات می‌شود:

(۱) اگر φ^* یک فرمول اتمی داریم:

$$\mathfrak{A} \models \varphi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi^*[\mathbf{b}].$$

(۲) اگر $\varphi^*[\mathbf{v}] = \neg\psi^*[\mathbf{v}]$ باشد، داریم:

$$\mathfrak{A} \models \varphi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi^*[\mathbf{a}].$$

(۳) اگر فرض کنیم $\varphi^*[\mathbf{v}] = \psi^*[\mathbf{v}] \wedge \delta^*[\mathbf{v}]$، آنگاه داریم:

$$\mathfrak{A} \models \varphi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi^*[\mathbf{a}] \wedge \mathfrak{A} \models \delta^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi^*[\mathbf{a}] \wedge \mathfrak{B} \models \delta^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi^*[\mathbf{a}].$$

(۴) اگر فرض کنیم $\varphi^*[\mathbf{v}] = \exists w \psi^*[\mathbf{v}, w]$، آنگاه داریم:

$$\mathfrak{A} \models \varphi^*[\mathbf{a}] \Rightarrow \exists a \in A : \mathfrak{A} \models \psi^*[\mathbf{a}, a] \Rightarrow \exists b \in B : \mathfrak{B} \models \psi^*[\mathbf{a}, b] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi^*[\mathbf{a}].$$

□

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک τ-ساختار و $N \subseteq M$ باشد. از نمادهای $x_1, x_2, \ldots$ برای متغیرهای آزاد دلخواه τ استفاده می‌کنیم. فرض کنید Σ مجموعه‌ای از فرمولها با متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشد و $\mathfrak{N}$ مدلی در τ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۲. می‌گوییم $\mathfrak{N}$، Σ را تحقق می‌بخشد اگر یک n-چندتایی از عناصر N، Σ را در $\mathfrak{N}$ ارضاء کند.

تعریف ۱۹.۱.۲. می‌گوییم $\mathfrak{N}$، Σ را حذف می‌کند اگر $\mathfrak{N}$، Σ را تحقق نبخشد. عبارت «Σ در $\mathfrak{N}$ ارضاپذیر است» دقیقاً به معنای این است که $\mathfrak{N}$، Σ را تحقق می‌بخشد.

تعریف ۲۰.۱.۲. دیاگرام اتمی $\mathfrak{N}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Diag(\mathfrak{N}) = \{\gamma(\bar{n}) \mid \mathfrak{N} \models \gamma(\bar{n}) \text{ بطوریکه } \gamma \text{ یک } \tau\text{-جمله اتمی یا نقیض اتمی}\}.$$

تعریف ۲۱.۱.۲. دیاگرام مقدماتی $\mathfrak{N}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Diag_{el}(\mathfrak{N}) = \{\gamma(\bar{n}) \mid \mathfrak{N} \models \gamma(\bar{n}) \text{ و } \bar{n} \in N \text{ و } \gamma \text{ یک } \tau\text{-جمله}\}.$$

نظریه τ-ساختار $\mathfrak{N}$ را با $Th(\mathfrak{N})$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Th(\mathfrak{N}) = \{\, \sigma \text{ جمله-}\tau \mid \mathfrak{N} \models \sigma\}.$$

برای مدل $\mathfrak{N}$ و زیرمجموعه $F \subset N$ داده شده، قرار دهید $\tau_F = \tau \cup \{c_a : a \in F\}$. (منظور از τ_F زبانی است که از اضافه کردن نمادهای ثابت برای اعضای F به زبان τ بدست می‌آید.) تعریف می‌کنیم:

$$Th(\mathfrak{N}_F) = \{\, \sigma \text{ جمله-}\tau_F \mid \mathfrak{N} \models \sigma\}.$$

توجه کنید که $Th(\mathfrak{N}_F) \subseteq Diag_{el}(\mathfrak{N})$. (بسط مدل $(\mathfrak{N}, a)_{a\in F}$ در زبان τ_F را با $\mathfrak{N}_F$ نشان می‌دهیم).

تعریف ۲۲.۱.۲. گوییم فرمول $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ سازگار با یک نظریه T است اگر و تنها اگر یک مدل از T موجود باشد که $\{\Gamma\}$ را تحقق بخشد.

تعریف ۲۳.۱.۲. گوییم مدل $\mathfrak{N}$، ω-اشباع شده[۲] است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه متناهی $F \subset N$، هر مجموعه از فرمولهای $\Gamma(x)$ از τ_F سازگار با $Th(\mathfrak{N}_F)$، در $\mathfrak{N}_F$ تحقق یافته شود.

[۲] یک مجموعه کاملاً مرتب $(A, \leqslant)$ خوشترتیب گفته می‌شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه غیرتهی A مانند B شامل عنصر کوچکترین (یکتا) باشد؛ یعنی، اگر یک عنصر $b \in B$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in B$، $b \leqslant x$. به هر مجموعه خوشترتیب $(A, \leqslant)$ یک عدد ترتیبی، که آنرا با $ord(A, \leqslant)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود. عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، با رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی، را با ω نشان می‌دهند، یعنی $ord(\mathbb{N}, \leqslant) = \omega$.

تعریف ۲.۱.۲۴. مدلی را اشباع شده شمارش‌پذیر می‌گویند اگر و تنها اگر شمارش‌پذیر و ω-اشباع شده باشد.

مثال ۲.۱.۲۵. (۱) مجموعه مرتب اعداد گویا، اشباع‌شده شمارش‌پذیر است.
(۲) هر مدل متناهی، اشباع‌شده شمارش‌پذیر است.

تعریف ۲.۱.۲۶. قرار دهید q مجموعه‌ای از τ_F-فرمولها در متغیرهای آزاد $x_۱, \cdots, x_n$ باشد. می‌گوییم q یک n-نوع است اگر $q \cup Th(\mathfrak{N}_F)$ ارضاپذیر باشد. می‌گوییم q یک n-نوع کامل است اگر برای هر τ_F-فرمول ϕ با متغیرهای آزاد $x_۱, \cdots, x_n$، $\phi \in q$ یا $\neg\phi \in q$.

مثال ۲.۱.۲۷. فرض کنید $\mathfrak{N} = (\mathbb{Q}, <)$ که F مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد. قرار دهید $q(x)$ مجموعه‌ای از فرمولهای $\{x > ۱, x > ۲, x > ۳, \ldots\}$ باشد. اگر Δ یک زیرمجموعه متناهی از $q(x) \cup Th(\mathfrak{N}_F)$ باشد، آنگاه می‌بینیم که Δ با تعبیر x به عنوان یک عنصر از $\mathbb{Q}$ ارضاپذیر است. طبق قضیه فشردگی، $q(x) \cup Th(\mathfrak{N}_F)$ ارضاپذیر است و $q(x)$ یک ۱-نوع است.

برای همین ساختار، قرار دهید $r(x) = \{\phi(x) \in Th(\mathfrak{N}_F) : \mathfrak{N} \models \phi(۱/۲)\}$. برای مثال فرمول $x < ۳$ متعلق به $r(x)$ است ولی $x > ۲$ در آن نیست. برای هر τ_F-فرمول $\psi(x)$، یا $\mathfrak{N} \models \psi(۱/۲)$ یا $\mathfrak{N} \models \neg\psi(۱/۲)$. بنابراین، $r(x)$ یک ۱-نوع کامل است.

قضیه ۲.۱.۲۸. ***(قضیه وجود مدلهای اشباع‌شده شمارش‌پذیر)*** *قرار دهید T یک نظریه کامل باشد. آنگاه T یک مدل اشباع‌شده شمارش‌پذیر دارد اگر و تنها اگر برای هر $n < \omega$، T حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از نوعهای n متغیره دارد.*

برهان. فرض کنید T یک مدل اشباع‌شده شمارش‌پذیر $\mathfrak{N}$ دارد ($\mathfrak{N} \models T$). هر نوع از T در n متغیرها در $\mathfrak{N}$ تحقق بخشیده می‌شود. اما هیچ n-چندتایی نمی‌تواند دو نوعِ متفاوت در n متغیرها را تحقق بخشد. بنابراین T حداکثر تعداد شمارش‌پذیری نوعها را دارد.

حال فرض کنید که برای هر n، T حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از نوعهای n متغیره دارد. با اضافه کردن یک مجموعه شمارش‌پذیر $C = \{c_۱, c_۲, \ldots\}$ از نمادهای ثابت جدید به τ، τ_F را تشکیل می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه متناهی $F = \{d_۱, \ldots, d_n\} \subset C$، نوعهای $\Gamma(x)$ از T

در τ_F در تناظر یک‌به‌یک با نوعهای $\Sigma(x_۱ \ldots x_n x)$ از T در τ هستند. بنابراین T حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از نوعهای $\Gamma(x)$ در τ_F دارد. قرار دهید

$$\Gamma_۱(x), \Gamma_۲(x), \ldots$$

شماری از نوعهای T در همه توسیع‌های τ_F و F یک زیرمجموعه متناهی C است. قرار دهید

$$\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots$$

شماری از همه جملات τ_F باشد. یک دنباله صعودی

$$T = T_۰ \subset T_۱ \subset \ldots$$

از نظریه‌های τ_F را داریم بطوریکه برای هر $m < \omega$:

(۱) T_m یک نظریه سازگار است که شامل حداکثر تعداد متناهی از ثوابت C است.

(۲) $\varphi_m \in T_{m+۱}$ یا $(\neg\varphi_m) \in T_{m+۱}$.

(۳) اگر $\varphi_m = (\exists x)\psi(x)$ در $T_{m+۱}$ باشد، آنگاه $\psi(c) \in T_{m+۱}$ برای بعضی $c \in C$.

(۴) اگر $\Gamma_m(x)$ سازگار با $T_{m+۱}$ باشد، آنگاه $\Gamma_m(d) \subset T_{m+۱}$ برای بعضی $d \in C$.

اجتماع $T_\omega = \bigcup_{n<\omega} T_n$ یک نظریه سازگار ماکسیمال در τ_F است. با استفاده از (۳) می‌بینیم که T_ω یک مدل $\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N}, a_۱, \ldots, a_n)$ دارد بطوریکه $N = \{a_۱, a_۲, \ldots\}$. بنابراین $\mathfrak{N}$ یک مدل شمارش‌پذیر T است.

هنوز اثبات اینکه $\mathfrak{N}$، ω-اشباع‌شده است، باقی مانده است. قرار دهید $F \subset N$ متناهی باشد و $\Sigma(x)$ با $Th(\mathfrak{N}_F)$ سازگار باشد. $\Sigma(x)$ را به یک نوع $\Gamma(x)$ در $Th(\mathfrak{N}_F)$ گسترش می‌دهیم. برای برخی m، $\Gamma(x) = \Gamma_m(x)$. $\Gamma_m(x)$ با T_ω سازگار است و از اینرو با $T_{m+۱}$ سازگار می‌شود. آنگاه طبق (۴)، $\Gamma_m(c_i) \subset T_{m+۱}$ برای برخی $c_i \in C$ و نتیجه می‌شود که a_i، $\Gamma(x)$ در $\mathfrak{N}_F$ را تحقق می‌بخشد. $\square$

قضیه ۲.۱.۲۹. *(**قضیه منحصربفردی مدلهای اشباع‌شده شمارش‌پذیر**) اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ مدلهای اشباع‌شده شمارش‌پذیر باشند و $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$، آنگاه $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ یکریخت است.*

برهان. با استفاده از اشباع‌شده شمارش‌پذیر بودن $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$، دو دنباله

$$a_0, a_1, \dots \quad , \quad b_0, b_1, \dots$$

بطوریکه

$$A = \{a_0, a_1, \dots\} \quad , \quad B = \{b_0, b_1, \dots\}$$

بدست می‌آوریم و برای هر n، a_n همان نوع در $(\mathfrak{A}, a_0, \dots, a_{n-1})$ را تحقق می‌بخشد که b_n در $(\mathfrak{B}, a_0, \dots, a_{n-1})$ را تحقق می‌بخشد. آنگاه

$$(\mathfrak{A}, a_0, \dots, a_{n-1}) \equiv (\mathfrak{B}, a_0, \dots, a_{n-1})،$$

پس توسط نگاشت $a_n \to b_n$، داریم $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. □

تعریف ۳۰.۱.۲. برای هر اردینال α مجموعه $R(\alpha)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(0) = 0,$$
$$R(\alpha + 1) = S(R(\alpha)),$$

اگر α یک اردینال حدی باشد $R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$،

که S یک نماد تابعی تک موضعی است که تابع تالی می‌گوییم (یعنی $S(X) = X \cup \{X\}$).

تعریف ۳۱.۱.۲. Δ_0 فرمول، یا فرمول سور کراندار، به مفهوم فرمولی در یک زبان، فقط با نماد $\in$ و تساوی است که از فرمول‌های اتمی با استفاده از ادات منطقی و سورهای نسبی‌شده $(\forall x \in y)$ و $(\exists x \in y)$ ساخته می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۲. Σ_1 فرمول، فرمولی است که از Δ_0 فرمولها با استفاده از ادات مثبت $\wedge$، $\vee$ و سورهای کراندار $(\forall x \in y)$، $(\exists x \in y)$ و سورهای وجودی $(\exists x)$ ساخته می‌شود.

تعریف ۳۳.۱.۲. زیرمجموعه K از $R(\omega)$ شمارای بازگشتی ($r.e.$) است، اگر در مدل $\langle R(\omega), \in\rangle$ با یک Σ_1 فرمول $\varphi(x)$ تعریف‌پذیر باشد، یعنی،

$$K = \{a \in R(\omega) : \langle R(\omega), \in\rangle \models \varphi[a]\}.$$

تعریف ۳۴.۱.۲. زیرمجموعه K از $R(\omega)$ بازگشتی است اگر هر دوی K و $R(\omega) \setminus K$ شمارای بازگشتی باشند.

تعریف ۳۵.۱.۲. می‌گوییم زبان τ بازگشتی است اگر مجموعه‌ای از نمادهای τ و شماری از توابع داده شده از نمادهای چندموضعی τ، زیرمجموعه‌های بازگشتی از $R(\omega)$ باشند. یعنی، هر یک از مجموعه‌های

$\{\langle n, v_n\rangle : n \in \omega\}$,

$\{c :$ c یک نماد ثابت $\tau\}$,

$\{R :$ R یک نماد رابطه‌ای $\tau\}$,

$\{f :$ f یک نماد تابعی $\tau\}$,

$\{\langle R, n\rangle :$ R یک نماد رابطه‌ای n-موضعی $\tau\}$,

$\{\langle f, n\rangle :$ f یک نماد تابعی n-موضعی $\tau\}$

زیرمجموعه‌های بازگشتی از $R(\omega)$ هستند.

تعریف ۳۶.۱.۲. τ را یک زبان بازگشتی در نظر بگیرید. مدل $\mathfrak{A}$، بازگشتی اشباع‌شده است اگر برای هر مجموعه متناهی $\{c_1, \ldots, c_n\}$ از نمادهای ثابت جدید، هر مجموعه بازگشتی $\Gamma(x)$ از فرمولهای $\tau(c_1, \ldots, c_n)$، و دنباله $a_1, \ldots, a_n$ از عناصر A، اگر $\Gamma(x)$ متناهیاً ارضاپذیر در $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$ باشد آنگاه $\Gamma(x)$ در $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$ تحقق می‌یابد.

مثال ۳۷.۱.۲. هر مدل ω-اشباع‌شده، بازگشتی اشباع‌شده است.

هر تحویل از مدل بازگشتی اشباع‌شده، بازگشتی اشباع‌شده است، زیرا هر مجموعه بازگشتی از فرمولها در زبان کوچک، یک مجموعه بازگشتی از فرمولها در زبان بزرگتر است. همچنین، هر بسط از مدل بازگشتی اشباع‌شده که با اضافه کردن کردن ثابتهای جدید متناهی ساخته می‌شود، دوباره بازگشتی اشباع‌شده است.

قضیه زیر در مورد وجود مدلهای بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر است.

قضیه ۳۸.۱.۲. **(قضیه وجود مدلهای بازگشتی اشباع‌شده)** *قرار دهید τ یک زبان بازگشتی و T یک نظریه کامل در τ باشد که مدلهای نامتناهی دارد. آنگاه T یک مدل بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر دارد.*

برهان. قبل از اثبات تاکید می‌کنیم که نیازی نیست نظریه T مجموعه بازگشتی از جمله‌ها باشد. یک مجموعه بازگشتی $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ از نمادهای ثابت جدید را به زبان τ اضافه می‌کنیم تا زبان بازگشتی τ_F بدست آید. توجه کنید اگر x_i متغیرهای مجزا و d_i ثوابتی مجزا در C برای هر $i = 1, \dots, n$ باشند، آنگاه مجموعه فرمولهای $\Gamma(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ از τ بازگشتی است اگر و تنها اگر $\Gamma(d_1, \dots, d_{n-1}, x_n)$ بازگشتی باشد. قرار دهید

$$\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \dots$$

شماری از مجموعه‌های بازگشتی از فرمولهای τ_F باشند که فقط با متغیر آزاد x که متناهیاً در ثوابتی از C ظاهر می‌شود، و قرار دهید

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

شماری از همه جملات τ_F باشند. شماری از همه جملات τ_F هستند. یک دنباله صعودی

$$T = T_0 \subset T_1 \subset \dots$$

از نظریه‌های τ_F را داریم بطوریکه برای هر $m < \omega$:

(۱) T_m یک نظریه سازگار است که شامل فقط تعداد متناهی از ثوابت C است.

(۲) $\varphi_m \in T_{m+1}$ یا $(\neg\varphi_m) \in T_{m+1}$.

(۳) اگر $\varphi_m = (\exists x)\psi(x)$ در T_{m+1} باشد، آنگاه $\psi(c) \in T_{m+1}$ برای بعضی $c \in C$.

(۴) اگر $\Gamma_m(x)$ سازگار با T_{m+1} باشد، آنگاه $\Gamma_m(d) \subset T_{m+1}$ برای بعضی $d \in C$.

اجتماع $T_\omega = \bigcup_{n<\omega} T_n$ یک نظریه سازگار ماکسیمال در τ_F است. با استفاده از (۳) می‌بینیم که T_ω یک مدل $\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N}, a_1, \dots, a_n)$ دارد بطوریکه $N = \{a_1, a_2, \dots\}$. بنابراین $\mathfrak{N}$ یک مدل شمارش‌پذیر T است.

هنوز اثبات اینکه $\mathfrak{N}$، ω-اشباع‌شده است، باقی مانده است. قرار دهید $F \subset N$ متناهی باشد و $\Sigma(x)$ با $Th(\mathfrak{N}_F)$ سازگار باشد. $\Sigma(x)$ را به یک نوع $\Gamma(x)$ در $Th(\mathfrak{N}_F)$ گسترش می‌دهیم. برای برخی m، $\Gamma(x) = \Gamma_m(x)$. $\Gamma_m(x)$ با T_ω سازگار است و از اینرو با T_{m+1} سازگار می‌شود. آنگاه طبق (۴)، $\Gamma_m(c_i) \subset T_{m+1}$ برای برخی $c_i \in C$ و نتیجه می‌شود که a_i، $\Gamma(x)$ در $\mathfrak{N}_F$ را تحقق می‌بخشد. پس یک مدل بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر از T بدست می‌آید. □

لم ۳۹.۱.۲. *قرار دهید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$، ω-اشباع شده باشند. آنگاه $(\mathfrak{B}, \boldsymbol{b}_\circ) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}_\circ)$ نتیجه می‌دهد که*

$$P : (\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}_\circ) \longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \boldsymbol{b}_\circ)$$

که در آن $P = \{p \subseteq A \times B \mid p, p : \mathfrak{A} \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} \mathfrak{B}$ *متناهی*$\}$.

برهان. P غیر تهی است: $(p : \mathbf{a}_\circ \mapsto \mathbf{b}_\circ) \in P$ بطوریکه $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_\circ) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}_\circ)$. هر عنصر $p \in P$، O را با تعریف حفظ می‌کند. هنوز باید خاصیت پس و پیش نسبت به O و $\mathbb{U}$ بررسی شود. قسمت «پیش» را اثبات می‌کنیم. قرار دهید $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p \in P$ و فرض کنید که $a \in U^{\mathfrak{A}}$ و $(U, +) \in O$. به دنبال $b \in U^{\mathfrak{B}}$ هستیم که در شرط $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}a) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}b)$ صدق کند. توجه کنید زمانیکه $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p$، $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ برقرار است. قرار دهید:

$$\Phi(\mathbf{a}, x) = \{\varphi(\mathbf{a}, x) \mid \varphi \text{ نسبی‌شده-}\mathbb{U}\ , occ(\varphi) \subseteq O, \mathfrak{A} \models \varphi[\mathbf{a}, a]\}$$

و مشابهاً قرار می‌دهیم: $\Phi(\mathbf{b}, x) = \{\varphi(\mathbf{b}, x) \mid \varphi(\mathbf{a}, x) \in \Phi(\mathbf{a}, x)\}$.

هر b از $\Phi(\mathbf{b}, x)$ در $\mathfrak{B}$ محقق خواهد شد بطوریکه $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}a) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}b)$. هنوز باید نشان دهیم که $\Phi(\mathbf{b}, x)$ سازگار با $Th(\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ است. فرض کنید مخالف آن باشد، یعنی ناسازگار باشد. چون Φ تحت ترکیب عطفی بسته است، پس $\varphi(\mathbf{a}, x) \in \Phi(\mathbf{a}, x)$ وجود دارد بطوریکه $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}) \models \neg(\exists x \in U)\varphi(\mathbf{b}, x)$. اما این متناقض با $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ است، اگر فرمول $\psi(\mathbf{x}) = (\exists x \in U)\varphi(\mathbf{x}, x)$ را در نظر بگیریم.

قسمت «پس» را اثبات می‌کنیم: قرار می‌دهیم $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \in p \in P$ و فرض می‌کنیم که $b \in U^{\mathfrak{A}}$ و $(U, -) \in O$. به دنبال $a \in U^{\mathfrak{A}}$ هستیم که در شرط $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}a) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}b)$ صدق کند. قرار دهید:

$$\Phi(\mathbf{b},x)=\{\neg\varphi(\mathbf{b},x) \mid \varphi \text{ نسبی‌شده-}\mathbb{U}\ , occ(\varphi)\subseteq O, \mathfrak{B}\models\neg\varphi[\mathbf{b},b]\}$$

و نیز: $\Phi(\mathbf{a},x)=\{\varphi(\mathbf{a},x) \mid \neg\varphi(\mathbf{b},x)\in\Phi(\mathbf{b},x)\}$.

هر a از $\Phi(\mathbf{a},x)$ در $\mathfrak{A}$ خواهد بود بطوریکه $(\mathfrak{A},\mathbf{a}a) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B},\mathbf{b}b)$. باید نشان دهیم که $\Phi(\mathbf{a},x)$ سازگار با $Th(\mathfrak{A},a)$ است. فرض می‌کنیم ناسازگار است. چون Φ تحت ترکیب عطفی بسته است پس $\neg\varphi(\mathbf{b},x)\in\Phi(\mathbf{b},x)$ وجود دارد بطوریکه $(\mathfrak{A},\mathbf{a})\models(\exists x\in U)\varphi(\mathbf{a},x)$. اما این متناقض با $(\mathfrak{A},\mathbf{a}) \Longrightarrow_O^{\mathbb{U}} (\mathfrak{B},\mathbf{b})$ است، اگر فرمول $\psi(\mathbf{x})=\neg(\exists x\in U)\varphi(\mathbf{x},x)$ را در نظر بگیریم. □

تعریف ۴۰.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو τ-ساختار باشند. یک τ-نشاننده بصورت $\eta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ می‌باشد که $\eta:A\to B$ یک تابع یک به یک بوده و η نمادهای τ را حفظ می‌کند. به عبارت دقیق‌تر:

(a) برای هر نماد تابعی f در زبان τ داشته باشیم:

$$\eta(f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_{n_f}))=f^{\mathfrak{B}}(\eta(a_1),\ldots,\eta(a_{n_f}))\quad \forall a_1,\ldots,a_{n_f}\in A.$$

(b) برای هر نماد رابطه‌ای R در زبان τ و هر $a_1,\ldots,a_{n_f}\in A$ داشته باشیم:

$$(a_1,\ldots,a_{n_f})\in R^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow(\eta(a_1),\ldots,\eta(a_{n_f}))\in R^{\mathfrak{B}}.$$

(c) برای هر نماد ثابت c در زبان τ داشته باشیم:

$$\eta(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}.$$

تعریف ۴۱.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو τ-ساختار باشند. τ-نشاننده $j:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ مقدماتی گفته می‌شود هرگاه برای هر τ-فرمول $\varphi(\bar{v})$ و هر $\bar{a}\in A$ داشته باشیم:

$$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(j\bar{a}).$$

اگر $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ آنگاه $\mathfrak{A}$ زیرساختار مقدماتی آن گفته می‌شود و می‌نویسیم $\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$ اگر نگاشت شمول $i:A\to B$ یک τ-نشاننده مقدماتی باشد.

بنابراین $\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$ اگر و تنها اگر برای هر τ-فرمول $\varphi(\bar{v})$ و هر $\bar{a}\in A$ داشته باشیم:

$$\mathfrak{A}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi(\bar{a}).$$

در این صورت $\mathfrak{B}$ را توسیع مقدماتی $\mathfrak{A}$ می‌گوییم.

نتیجه ۴۲.۱.۲. *قرار دهید τ یک زبان بازگشتی باشد. آنگاه هر مدل شمارش‌پذیر $\mathfrak{A}$ از τ یک توسیع بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر مقدماتی دارد.*

برهان. قرار دهید τ_F یک توسیع بازگشتی τ با اضافه کردن مجموعه شمارش‌پذیر از نمادهای ثابت جدید باشد. آنگاه $\mathfrak{A}'$ یک توسیع $\mathfrak{A}$ در τ_F است که هر عنصر A یک تعبیری از یک ثابت است. طبق قضیه (۳۸.۱.۲)، T' دیاگرام مقدماتیِ $\mathfrak{A}'$ یک مدل بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر $\mathfrak{B}'$ دارد. $\mathfrak{B}'$، تحویل $\mathfrak{B}$ در τ، یک مدل بطور بازگشتی اشباع‌شده شمارش‌پذیر مقدماتی $\mathfrak{A}$ است. $\square$

نتیجه ۴۳.۱.۲. *برای* $(\mathfrak{A},\boldsymbol{a}_\circ) \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B},\boldsymbol{b}_\circ)$، $(\mathfrak{A}^*,\boldsymbol{a}_\circ)$ *و* $(\mathfrak{B}^*,\boldsymbol{b}_\circ)$ *شمارش‌پذیر وجود دارند بطوریکه،* $(\mathfrak{A},\boldsymbol{a}_\circ) \equiv (\mathfrak{A}^*,\boldsymbol{a}_\circ)$، $(\mathfrak{B},\boldsymbol{b}_\circ) \equiv (\mathfrak{B}^*,\boldsymbol{b}_\circ)$ *و* $(\mathfrak{B}^*,\boldsymbol{b}_\circ) \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{A}^*,\boldsymbol{a}_\circ)$.

برهان. اگر بجای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$، توسیعهای مقدماتی و ω-اشباع‌شده $\mathfrak{A}' \preccurlyeq \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}' \preccurlyeq \mathfrak{B}$ را در نظر بگیریم، توسط لم (۳۹.۱.۲)، $(\mathfrak{A}',\mathbf{a}_\circ) \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B}',\mathbf{b}_\circ)$ نتیجه می‌شود. برای بدست آوردن یک نوع شمارش‌پذیر در این حالت، کافیست $(\mathfrak{A}',\mathbf{a}_\circ)$ و $(\mathfrak{B}',\mathbf{b}_\circ)$، و سیستم پس و پیش P را در یک ساختار مرتبه اول بدست بیاوریم و قضیهٔ لوونهایم-اسکولم-تارسکی را بکار ببریم. $\square$

لم ۴۴.۱.۲. *اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ شمارش پذیر باشند و* $(\mathfrak{A},\boldsymbol{a}_\circ) \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B},\boldsymbol{b}_\circ)$، *آنگاه وجود دارد* $p \subseteq A \times B$ *بطوریکه* $p : \mathfrak{A} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} \mathfrak{B}$ *و* $\boldsymbol{a}_\circ\boldsymbol{b}_\circ \in p$.

طرح اثبات. طبق لم (۳۹.۱.۲)، فرض $(\mathfrak{A},\mathbf{a}_\circ) \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B},\mathbf{b}_\circ)$، حکم $(\mathfrak{A},\mathbf{a}_\circ) \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B},\mathbf{b}_\circ)$ را نتیجه می‌دهد. پس با یک سیستم پس و پیش P (بدون کاستن از کلیت که شامل p متناهی و p تحت زیرمجموعه‌های بسته، یعنی، $P = \{p \subseteq A \times B \mid p, p : \mathfrak{A} \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} \mathfrak{B}\ \text{متناهی}\}$) شروع می‌کنیم و طبق لم (۳۹.۱.۲)، $a \in A^{+/O}$ و $b \in B^{-/O}$ را طبق روش پس و پیش پیدا می‌کنیم. چون $p \subseteq A \times B$، پس طبق تعریف دامنه و برد p داریم:

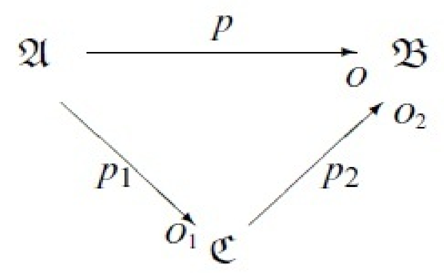
$$dm(p) = \{a \in A \mid (\exists b \in B)((a,b) \in p)\},$$

$$im(p) = \{b \in B \mid (\exists a \in A)((a,b) \in p)\}.$$

پس شماری از $a \in A^{+/O} \subseteq A$ و $b \in B^{-/O} \subseteq B$ را بدست آوردیم که $p \in P$ است. پس اجتماع pها شروط $dm(p) \supseteq A^{+/O}$ و $im(p) \supseteq B^{-/O}$ را ارضاء می‌کند. $\square$

۲.۲ اثبات قضیه درونیابی جدید

گزاره اصلی به سمت اثبات قضیه پیش می‌رود، در واقع، ممکن است خاصیت درونیابی ساختاری را پشت این قضیه تصور کرد. این حالت در طرح زیر نشان داده شده است:



گزاره ۱.۲.۲. (گزاره اصلی). *قرار دهید $O_1, O_2 \subseteq Occ$ و $O = O_1 \cap O_2$.
اگر $p : \mathfrak{A} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} \mathfrak{B}$ آنگاه $\mathfrak{C}$ و $p_1 \subseteq A \times C$ و $p_2 \subseteq C \times B$ وجود دارد بطوریکه $p = p_1 \circ p_2$ و $p_2 : \mathfrak{C} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_2} \mathfrak{B}$ و $p_1 : \mathfrak{A} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_1} \mathfrak{C}$. بیشتر ممکن است نیاز به $dm(p_1) = A$ و $im(p_2) = B$ باشد.*

برهان. قرار دهید $* \notin A \cup B$. C را جهان مطلوب ساختار $\mathfrak{C}$ در نظر می‌گیریم که زیرمجموعه‌ای از $(A \dot\cup \{*\}) \times (B \dot\cup \{*\})$ است. فرض کنید

$$C = p \dot\cup ((A \setminus dm(p)) \times \{*\}) \dot\cup (\{*\} \times (B \setminus im(p))),$$
$$p_1 = \{(a, (a, b)) \mid (a, b) \in p\} \dot\cup \{(a, (a, *)) \mid a \in A \setminus dm(p)\},$$
$$p_2 = \{((a, b), b) \mid (a, b) \in p\} \dot\cup \{((*, b), b) \mid b \in B \setminus im(p)\}.$$

بطور مستقیم از تعاریف می‌بینیم که $p = p_1 \circ p_2$ و $dm(p_1) = A$ و $im(p_2) = B$. برای حالت تساوی نیز توجه داشته باشید که اگر p تابع جزئی یک به یک باشد p_iها نیز هستند. حال برای حل این مشکل بایستی تعبیر محمولات $R \in \tau$ روی C را با در نظر گرفتن p_1 نسبت به O_1 و p_2 نسبت به O_2 معین کنیم و خواص مربوط به سیستم پس و پیش را تضمین کنیم. از آنجا که $dm(p_1) = A$ و $im(p_2) = B$، شرایط پس و پیش باقی می‌ماند که به $im(p_1) \supseteq C^{-/O_1}$ و $dm(p_2) \supseteq C^{+/O_2}$ تحویل می‌یابد.

R را n-موضعی و $\mathbf{c} \in C^n$ قرار دهید. بطور کلی برای $\mathbf{a} \in (A \dot\cup \{*\})^n$ و $\mathbf{b} \in (B \dot\cup \{*\})^n$، می‌نویسیم $\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}$. چند مورد را مشخص می‌کنیم.

(a) اگر $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{b} \in B^n$ و $\mathfrak{B} \models R\mathbf{b} \iff \mathfrak{A} \models R\mathbf{a}$، قرار دهید:

$$\mathfrak{C} \models R\mathbf{c} \iff \mathfrak{A} \models R\mathbf{a}.$$

(b) اگر $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{b} \in B^n$ و $\mathfrak{A} \models R\mathbf{a}$ اما $\mathfrak{B} \models \neg R\mathbf{b}$ (که $(R, +) \notin O$):

(i) اگر $(R, +) \in O_1 \smallsetminus O_2$، قرار دهید: $\mathfrak{C} \models R\mathbf{c}$.

(ii) اگر $(R, +) \in O_2 \smallsetminus O_1$، قرار دهید: $\mathfrak{C} \models \neg R\mathbf{c}$.

(iii) اگر $(R, +) \notin O_1 \cup O_2$، $R\mathbf{c}$ را دلخواه می‌گیریم.

(c) اگر $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{b} \in B^n$ و $\mathfrak{A} \models \neg R\mathbf{a}$ اما $\mathfrak{B} \models R\mathbf{b}$ (که نتیجه می‌دهد $(R, -) \notin O$) همانطور که در (b) اقدام کردیم، با این تفاوت که $(R, -)$ را در نظر می‌گیریم، یعنی:

(i') اگر $(R, -) \in O_1 \smallsetminus O_2$، قرار دهید: $\mathfrak{C} \models R\mathbf{c}$.

(ii') اگر $(R, -) \in O_2 \smallsetminus O_1$، قرار دهید: $\mathfrak{C} \models \neg R\mathbf{c}$.

(iii') اگر $(R, -) \notin O_1 \cup O_2$، $R\mathbf{c}$ را دلخواه می‌گیریم.

(d) اگر $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{b} \notin B^n$ (یعنی $\mathbf{a} \notin dm(p)$ و $\mathbf{c} \notin dm(p_2)$)، قرار دهید:

$$\mathfrak{C} \models R\mathbf{c} \iff (\mathfrak{A} \models R\mathbf{a}, (R, +) \in O_1).$$

(e) اگر $\mathbf{a} \notin A^n$ و $\mathbf{b} \in B^n$ (یعنی $\mathbf{b} \notin im(p)$ و $\mathbf{c} \notin im(p_1)$)، قرار دهید:

$$\mathfrak{C} \models R\mathbf{c} \iff (\mathfrak{B} \models R\mathbf{b}, (R, -) \in O_2).$$

(f) اگر $\mathbf{a} \notin A^n$ و $\mathbf{b} \notin B^n$ ، $R\mathbf{c}$ را دلخواه می‌گیریم.

هنوز اثبات این ادعا که p_i ، O_i را حفظ می‌کند، و $im(p_1) \supseteq C^{-/O_1}$ و $dm(p_2) \supseteq C^{+/O_2}$، باقی مانده است. توجه داشته باشید که اگر، $\mathbf{a}\,\mathbf{c} \in p_1$ آنگاه برای بعضی $\mathbf{b} \in (B \dot\cup \{*\})^n$، $\mathbf{a} \in A^n$ و $\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}$، که $\mathbf{a}'\mathbf{b}' \in p$ چندتایی اولیه مطرح شده از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستند، زمانیکه $\mathbf{b}$ ورودیهایی از B باشند.

- O_1 ،p_1 را حفظ می‌کند. فرض کنید که $\mathbf{a}\,\mathbf{c} \in p_1$ و $(R,+) \in O_1$؛ مربوط به مواردی است که در آن $\mathfrak{A} \models R\mathbf{a}$ و در (a) و (b) یا (d) بررسی شده است. اگر $(R,-) \in O_1$، پس با این نگاه که $\mathfrak{A} \models \neg R\mathbf{a}$، و پیدا می‌کنیم موارد مربوطی را که در (a) و (c) یا (d) بحث کردیم.

- $im(p_1) \supseteq C^{-/O_1}$. توجه کنید که همه عناصر C بجز آنهایی که بصورت $c = (*, b)$ هستند در $im(p_1)$ اندک هستند. برای $(*, b) \in C$ نتیجه می‌شود $b \notin im(p_1)$. اگر $(*, b) \in U^{\mathfrak{C}}$، آنگاه طبق (e)، $(U,-) \in O_2$ و $b \in U^{\mathfrak{B}}$. بنابراین، $(U,-)$ نمی‌تواند در O_1 باشد، پس نتیجه می‌شود که $(U,-) \in O$ و $b \in im(p)$. پس هیچ عنصری بصورت $(*, b)$ در C^{-/O_1} نیست.

پس حالت p_2، O_2 را حفظ می‌کند و $dm(p_2) \supseteq C^{+/O_2}$ مشابهاً اثبات می‌شوند. □

اثبات قضیه ۸.۱.۲. قرار دهید φ و ψ فرمولهای $\mathbb{U}$-نسبی‌شده باشند و $\varphi \models \psi$. قرار دهید $\mathbf{x}_0$ نشان‌دهنده یک چندتایی از متغیرهایی باشد که در هر دوی φ و ψ آزاد هستند، پس چندتایی‌های $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ را منظور می‌کنیم، که جفت چندتایی‌های $\mathbf{x}_i$ از هم مجزا هستند، بطوریکه $\varphi = \varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ و $\psi = \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2)$ همه متغیرهای آزاد را نمایش می‌دهند.
قرار دهید $O_1 = occ(\varphi)$ و $O_2 = occ(\psi)$ و $O = O_1 \cap O_2$. فرض کنید فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده $\chi(\mathbf{x}_0)$ با $occ(\chi) \subseteq O$ وجود ندارد بطوریکه $\chi \models \psi$ و $\varphi \models \chi$.
قرار دهید:

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \{\chi(\mathbf{x}_0) \mid \chi \text{ نسبی‌شده-}\mathbb{U}\ , occ(\chi) \subseteq O, \varphi \models \chi\}.$$

با این مفروضات (و فشردگی)، $\Phi \not\models \psi$. $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2) \models \Phi \cup \{\neg\psi\}$ را در نظر بگیرید.
قرار دهید:

$$\Theta(\mathbf{x}_0) = \{\neg\chi(\mathbf{x}_0) \mid \chi \text{ نسبی‌شده-}\mathbb{U}\ , occ(\chi) \subseteq O, (\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0) \models \neg\chi\}.$$

نتیجه می‌گیریم که $\Theta \cup \{\varphi\}$ نیز سازگار است. در غیر این صورت، با فشردگی و چون Θ تحت ترکیب عطفی بسته است، پس $\neg\chi \in \Theta$ وجود دارد که $\varphi \models \chi$. اما $\chi \in \Phi$، که از آنجا $\mathfrak{B} \models \chi$، و این تناقض است.

بنابراین یک $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) \models \Theta \cup \{\varphi\}$ را پیدا کرده‌ایم. نتیجه می‌گیریم که $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_0) \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0)$. با نتیجه (۴۳.۱.۲) این حالتِ بهتر می‌تواند برای شماری از $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)$ و $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2)$ بدست آید بطوریکه $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_0) \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0)$، $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1]$، و $\mathfrak{B} \models \neg\psi[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2]$.

با بکاربردن لم (۴۴.۱.۲)، $p : \mathfrak{A} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O} \mathfrak{B}$ را برای یک $p \subseteq A \times B$ واحد با $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 \in p$، بدست آورده‌ایم. اما حال یک ساختار $\mathfrak{C}$ و روابط بین p_1 و p_2 را بدست می‌آوریم بطوریکه $p = p_1 \circ p_2$، $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \in dm(p_1)$، $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2 \in im(p_2)$ و $p_2 : \mathfrak{C} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_2} \mathfrak{B}$، $p_1 : \mathfrak{A} \longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_1} \mathfrak{C}$.

قرار دهید $\mathbf{c}_0$ طوری باشد که $\mathbf{a}_0\mathbf{c}_0 \in p_1$ و $\mathbf{c}_0\mathbf{a}_0 \in p_2$ (یادآوری می‌کنیم که $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 \in p$ و $p = p_1 \circ p_2$). قرار دهید $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ بطوریکه $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1 \in p_1$ و $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_2\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2 \in p_2$ (از آنجا که بترتیب $\mathbf{a}_1 \in dm(p_1)$ و $\mathbf{b}_2 \in im(p_2)$، پس وجود دارند). نتیجه می‌شود $(\mathfrak{C}, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2) \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_2} (\mathfrak{B}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2)$، و $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) \Longrightarrow^{\mathbb{U}}_{O_1} (\mathfrak{C}, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1)$. با پایایی $\mathfrak{C} \models \varphi[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1]$ و از طرفی $\varphi \models \psi$، داریم $\mathfrak{C} \models \psi[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2]$، که با پایایی $\mathfrak{B} \models \psi[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2]$ در تناقض است. $\square$

فصل ۳

کاربردهای قضیه درونیابی جدید

نشان می‌دهیم چگونه قضیه (۸.۱.۲) چندین درونیابی و پایایی را بصورت واحد ترکیب می‌کند. یعنی، بطور مستقیم فقط به قضیه درونیابی لیندون [۱۲] منجر نمی‌شود (قضیه (۹.۱.۲) فوق را ببینید)، بلکه چندین درونیابی مربوط و نتایج پایایی را نیز نتیجه می‌دهد. از میان آنها قضایای رده‌بندی کلاسیک با تمرکز بر پایایی تحت توسیعها و زیرساختارها [۴]، و گونه‌ای از قضیه درونیابی چندگونه فِفِرمن [۷، ۸]، به موازات نتیجه رده‌بندی اخیر فون بِنثِم [۲] در مورد پایایی تحت تبدیلات چو وجود دارند.

۱.۳ قضایای پایایی کلاسیک

قضایای پایایی منطق اغلب به شکل تقابل نحو در مقابل معناشناسی می‌باشد؛ برای مثال، قضیه لوش-تارسکی بیان می‌کند که یک جمله منطق مرتبه اول تحت توسیعها حفظ می‌شود اگر و تنها اگر معادل یک جمله وجودی باشد.

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$، τ-ساختار باشند و Δ کلاسی از فرمولهای دلخواه باشد (لزومی ندارد از زبان τ باشد).

لم ۱.۱.۳. *قرار دهید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$، τ-ساختار باشند. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ (یعنی، $\mathcal{M}$ یک زیرساختار $\mathcal{N}$ است) اگر و تنها اگر $M \subseteq N$، M در $\mathcal{N}$ تحت توابع تک‌گونه (بعبارت دیگر این نمادهای تابعی تک‌گونه به عنوان چیزی شبیه به f_2 (دوتایی) و f_1 (یگانی) و f_0 (صفر موضعی) تعریف می شوند)، بسته است، و*

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}) \quad (*)$$

برای همه τ-فرمولهای φ و چندتایی $\bar{a}$ از M برقرار است.

برهان. کافیست نشان دهیم که شرط $(*)$ برای فرمولهای (داده شده طبق تعریف زیرساختارها) شرط کامل $(*)$ را نتیجه می‌دهد. اولین مرحله در اثبات $(*)$ برای فرمولهای اتمی است، که می‌تواند با استقراء روی پیچیدگی ترمهای ظاهر شده در فرمولهای اتمی ثابت شود. دومین مرحله، با استقراء

روی پیچیدگی فرمولهای بدون سور صورت می‌گیرد، از آنجا که شرط $(*)$ تحت ترکیب عطفی و فصلی و نقیض گسترش می‌یابد. $\square$

تعریف ۲.۱.۳. می‌نویسیم $\mathcal{N} \Rrightarrow_\Delta \mathcal{M}$ یا $\mathcal{M} \Lleftarrow_\Delta \mathcal{N}$، اگر $\mathcal{M} \models \varphi$ برای هر $\varphi \in \Delta \cap \tau$، $\mathcal{N} \models \varphi$ را نتیجه بدهد. از نماد $\mathcal{N} \equiv_\Delta \mathcal{M}$ زمانیکه هر دوی $\mathcal{N} \Rrightarrow_\Delta \mathcal{M}$ و $\mathcal{M} \Rrightarrow_\Delta \mathcal{N}$ برقرار باشند، استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۳. نماد $f : \mathcal{M} \overset{\Delta}{\to} \mathcal{N}$ را تعریف می‌کنیم که $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ برای هر $\varphi \in \Delta\cap\tau$، $\mathcal{N} \models \varphi(f[\bar{a}])$ نتیجه بدهد (از اینرو همه τ-فرمولهای φ، شامل متغیرهای آزاد هستند) و چندتایی $\bar{a}$ از M انتخاب می‌شوند. به این دلیل می‌نویسیم $f : \mathcal{M} \overset{\equiv}{\to} \mathcal{N}$ بجای $f : \mathcal{M} \overset{\tau}{\to} \mathcal{N}$.

در $\mathcal{M} \Rrightarrow_\Delta \mathcal{N}$ (یا $f : \mathcal{M} \overset{\Delta}{\to} \mathcal{N}$) فقط فرمولهایی که در Δ فرض کردیم همواره در τ هستند. برای مثال، اگر Δ شامل همه τ باشد، آنگاه $f : \mathcal{M} \overset{\Delta}{\to} \mathcal{N}$ را بیشتر $f : \mathcal{M} \overset{\equiv}{\to} \mathcal{N}$ در نظر می‌گیریم.

تذکر ۴.۱.۳. قرار دهید $\mathcal{M}$ یک τ-ساختار باشد. دیاگرام $\mathcal{M}$ را با نماد $Diag(\mathcal{M})$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌ای از همه $\tau(M)$-جملات اتمی و نقیض اتمی است که در $\mathcal{M}$ درست هستند، یعنی:

$$Diag(\mathcal{M}) = \{\varphi(\bar{a}) : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{، اتمی است } \varphi \in \tau \text{ , } \bar{a} \in M\}$$
$$\cup \{\neg\varphi(\bar{a}) : \mathcal{M} \models \neg\varphi(\bar{a}) \text{، اتمی است } \varphi \in \tau \text{ , } \bar{a} \in M\}$$

تذکر ۵.۱.۳. البته لم (۱.۱.۳) را می‌توانیم بازنویسی کنیم که: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ اگر و تنها اگر $M \subseteq N$، M تحت توابع بسته است، و $(\mathcal{N}, M) \models Diag(\mathcal{M})$، که معادل است با $\mathcal{M} \overset{qf}{\to} \mathcal{N}$ (که qf نشان‌دهنده کلاس همه فرمولهای بدون سور است).

لم ۶.۱.۳. ***(لم دیاگرام)*** *فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$، τ-ساختار باشند و $f : M \to N$.*

(۱) $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ (یعنی، f یک نشاننده از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ است) اگر و تنها اگر $f : \mathcal{M} \overset{qf}{\to} \mathcal{N}$ اگر و تنها اگر $(\mathcal{N}, f[\mathcal{M}]) \models Diag(\mathcal{M})$. بویژه، $f : \mathcal{M} \overset{\equiv}{\to} \mathcal{N}$، $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ را نتیجه می‌دهد.

(۲) $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ اگر و تنها اگر $\mathcal{N}$ یک $\tau(M)$-بسط باشد که یک مدل از $Diag(\mathcal{M})$ است.

برهان. برای اثبات (۱)، قرار دهید Δ مجموعه‌ای از همه فرمولهای اتمی یا نقیض آنها باشد. طبق لم (۱.۱.۳)، داریم:

$$f:\mathcal{M}\hookrightarrow\mathcal{N}\Leftrightarrow f:\mathcal{M}\overset{qf}{\to}\mathcal{N}\Leftrightarrow f:\mathcal{M}\overset{\Delta}{\to}\mathcal{N}$$

که طبق تذکر (۵.۱.۳) معادل است با $(\mathcal{N},f[\mathcal{M}])\models Diag(\mathcal{M})$.

(۲) از (۱) نتیجه می‌شود: اگر $\mathcal{N}'$ یک τ-بسط $\mathcal{N}$ باشد که $Diag(\mathcal{M})$ را ارضاء می‌کند، آنگاه، برای هر $a\in M$ داریم $f(a)=\underline{a}^{\mathcal{N}'}$، پس $f:\mathcal{M}\hookrightarrow\mathcal{N}$ بدست می‌آید. □

گزاره ۷.۱.۳. *اگر* $f:\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$*، آنگاه* $f:\mathcal{M}\overset{\equiv}{\hookrightarrow}\mathcal{N}$*، از اینرو همچنین* $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$*.* (یعنی، $Th\,(\mathcal{M})=Th\,(\mathcal{N})$).

برهان. طبق لم (۱.۱.۳) می‌دانیم که $f:\mathcal{M}\overset{qf}{\to}\mathcal{N}$، یعنی اینکه

$$\mathcal{M}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathcal{N}\models\varphi(f[\bar{a}])\quad(**)$$

برای هر $\varphi\in qf$ و چندتایی $\bar{a}\in M$ برقرار است.

با استقراء روی پیچیدگی φ، $(**)$ را برای هر $\varphi\in\tau$ بررسی می‌کنیم. مراحل استقراء برای ترکیب عطفی و نقیض بدیهی می‌باشد. فقط مرحل سور وجودی را بررسی می‌کنیم.

قرار دهید φ بصورت $\exists x\psi(x,\bar{a})$ باشد، که $\psi\in\tau_{n+1}$ و $\bar{a}\in M^n$. فرض کنید برای هر $b\in M$ داریم:

$$.\mathcal{M}\models\psi(b,\bar{a})\Leftrightarrow\mathcal{N}\models\psi(f[b],f[\bar{a}])$$

بایستی نشان دهیم که:

$$.\mathcal{M}\models\exists x\psi(x,\bar{a})\Leftrightarrow\mathcal{N}\models\exists x\psi(x,f[\bar{a}])$$

توجه کنید که برای هر $b\in M$، $\mathcal{M}\models\exists x\psi(x,\bar{a})\Leftrightarrow\mathcal{M}\models\psi(b,\bar{a})$. این فرض اخیر، به نوبه خود، معادل با این است که $b\in M$ وجود دارد بطوریکه $\mathcal{N}\models\psi(f[b],f[\bar{a}])$. از آنجا که f پوشا می‌باشد، پس معادل می‌شود با اینکه $c\in N$ وجود دارد بطوریکه $\mathcal{N}\models\psi(c,f[\bar{a}])$، از اینرو $\mathcal{N}\models\exists x\psi(x,f[\bar{a}])$، بدست می‌آید. □

تذکر ۸.۱.۳. این می‌تواند برای پیدا کردن، برای هر ساختار $\mathcal{M}$، یک ساختار مجزای $\mathcal{N}\models Th\,(\mathcal{M})$ مورد استفاده قرار گیرد: f یک تابع یک‌به‌یک را از M به یک مجموعه دلخواه مجزای N بگیرید

و ساختار $\mathcal{N}$ را مطابق قبل تعریف می‌کنیم. آنگاه $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ و از اینرو، طبق گزاره قبلی، $\mathcal{N} \models Th\left(\mathcal{M}\right)$.

۱.۱.۳ قضایای پایایی ساده

با یک لم ساده شروع می‌کنیم:

لم ۹.۱.۳. *فرض کنید $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$. آنگاه $\mathcal{N} \Rrightarrow_\forall \mathcal{M}$ و حتی $(\mathcal{N}, N) \Rrightarrow_\forall (\mathcal{M}, M)$.*

برهان. قرار دهید $\psi(\bar{x})$ یک $\forall$-فرمول دلخواه باشد، یعنی، ψ بصورت $\forall \bar{y}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ است که $\varphi \in qf$. با لم (۶.۱.۳) قسمت (۱)، برای همه چندتاییهای $\bar{a}$ و $\bar{b}$ از M داریم:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(f[\bar{a}], f[\bar{b}]).$$

پس $\mathcal{N} \models \forall \bar{y} \varphi(f[\bar{a}], \bar{y})$ نتیجه می‌دهد $\mathcal{M} \models \forall \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$، یعنی، $\mathcal{N} \models \psi(f[\bar{a}])$، $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ را نتیجه می‌دهد. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۳. قرار دهید T یک τ-نظریه باشد. گوییم $Mod\left(T\right)$ (یا فقط T) تحت زیرساختارها بسته است (یا حفظ می‌شود) اگر $\mathcal{N} \models T$، برای τ-ساختارهای غیرتهی $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ با شرط $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، $\mathcal{M} \models T$ را نتیجه بدهد. «بسته بودن تحت زیرساختارها» را اغلب ارثی نیز می‌گویند.

تذکر ۱۱.۱.۳. اگر T در زیرساختارها حفظ شود، آنگاه آن همواره در نشاندن حفظ می‌شود، یعنی، اگر $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N} \models T$ و $M \neq \emptyset$ آنگاه $\mathcal{M} \models T$.

لم ۱۲.۱.۳. *برای هر τ-نظریه T و T'، شرایط زیر معادلند:*

(i) *هر مدلی از T' می‌تواند در مدلی از T بنشیند.*

(ii) $T_\forall \subseteq T'$.

برهان. $(i) \Longrightarrow (ii)$ از لم (۹.۱.۳) نتیجه می‌شود.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. قرار دهید $T_\forall \subseteq T'$ و $\mathcal{M} \models T'$. می‌خواهیم $\mathcal{N} \models T$ با $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ پیدا کنیم. طبق لم (۶.۱.۳) قسمت (۲)، این معادل با سازگاری $T \cup Diag(\mathcal{M})$ است.

فرض کنید $T \cup Diag(\mathcal{M})$ ناسازگار باشد. آنگاه یک ترکیب عطفی متناهی $\varphi(\bar{a})$، از فرمولهای $Diag(\mathcal{M})$ وجود دارد بطوریکه $T \cup \varphi(\bar{a})$ ناسازگار باشد، از اینرو $T \models \neg\varphi(\bar{a})$. از آنجا که ثوابت $\bar{a}$ در T ظاهر نمی‌شوند، پس نتیجه می‌شود $T \models \forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x})$، از اینرو $\forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x}) \in T$. اما $\forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x}) \in \forall$ (چون $\varphi \in qf$)، پس $\forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x}) \in T_\forall$. آنگاه $\mathcal{M} \models T'$ و $T_\forall \subseteq T'$ نتیجه می‌دهد $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x})$، که متناقض با این حقیقت است که $\varphi(\bar{a})$ در $\mathcal{M}$ برقرار است. $\square$

تذکر ۱۳.۱.۳. $T_\forall = T'$ نشان می‌دهد که

$$.Mod\,(T_\forall) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N} \models T\}$$

یعنی، مدلهای $\forall$-بخش، $T_\forall$، نظریه‌ای از T هستند که دقیقاً زیرساختارهایی از مدلهای T می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$.T_\forall = Th(\{\mathcal{M} : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N} \models T\})$$

گزاره ۱۴.۱.۳. *برای هر τ-نظریه T و مجموعه‌ای از فرمولهای $\Phi(\bar{x}) \subseteq \tau_n$، شرایط زیر معادلند:*

(i) *$\Phi(\bar{x})$ با مجموعه‌ای از $\forall$-فرمولهای τ در متغیرهای آزاد یکسان T-معادل هستند.*

(ii) *برای مدلهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ از T و هر $\bar{a} \in M^n$، اگر $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و $\mathcal{N} \models \Phi(\bar{a})$، آنگاه $\mathcal{M} \models \Phi(\bar{a})$. به عبارت دیگر، برای مدلهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ از T، اگر $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، آنگاه $.(\mathcal{N}, M) \Rrightarrow_{\Phi(M)} (\mathcal{M}, M)$*

برهان. کافیست نشان دهیم که (ii) برقرار است اگر و تنها اگر $\Phi(\bar{c})$ با یک مجموعه $\forall$-جملات در $\tau(\bar{c})$ (که $\bar{c}$ ثوابت جدید هستند) T-معادل است. اگر $\mathcal{M}^*$ و $\mathcal{N}^*$، $\tau(\bar{c})$-ساختار با $\mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{N}^*$ باشند، آنگاه، برای τ-تحویلهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$، داریم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، و $\bar{a} \in M^n$ وجود دارد بطوریکه $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}, \bar{a})$ و $\mathcal{N}^* = (\mathcal{N}, \bar{a})$. برعکس، اگر $\bar{a} \in M^n$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، آنگاه $(\mathcal{M}, \bar{a}) \subseteq (\mathcal{N}, \bar{a})$، $\tau(\bar{c})$-ساختار هستند. از اینرو (ii) معادل با این حقیقت است که مجموعه $\tau(\bar{c})$-جملات، $\Phi(\bar{c})$، تحت زیرساختارهایی که τ-تحویلها خودشان مدلهایی از T هستند، حفظ می‌شود.

حال اگر $\Phi(\bar{c})$ با یک مجموعه $\forall$-جملات T-معادل باشد، آنگاه (ii) از لم (۹.۱.۳) برای $\tau(\bar{c})$ نتیجه می‌شود.

برعکس، قرار دهید $\Phi(\bar{c})$ تحت زیرساختارهایی که τ-تحویلها خودشان مدلهایی از T هستند، حفظ شود. قرار دهید $\Psi(\bar{c})$ یک $\forall$-بخش $(T \cup \Phi(\bar{c}))$ (در $\tau(\bar{c})$) باشد. طبق تذکر (۱۳.۱.۳)، مدلهای $\Psi(\bar{c})$ دقیقاً $\tau(\bar{c})$-زیرساختارهایی از مدلهای $T \cup \Phi(\bar{c})$ هستند. از اینرو، تحت فرضیه پایایی فوق، مدلهای $T \cup \Psi(\bar{c})$ همواره مدلهایِ $T \cup \Phi(\bar{c})$ هستند. درنتیجه، $T \cup \Phi(\bar{c})$ و $T \cup \Psi(\bar{c})$ معادل هستند، یعنی، $\Phi(\bar{c})$ و $\Psi(\bar{c})$، T-معادلند.

□

نتیجه ۱۵.۱.۳. *فرض کنید T یک τ-نظریه باشد. یک τ-فرمول $\varphi(\bar{x})$ با یک $\forall$-فرمول T-معادل است اگر و تنها اگر $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$، برای همه $\mathcal{M} \models T$ و $\mathcal{N} \models T$ با شرط $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و برای هر $\bar{a} \in M$، $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ را نتیجه بدهد.*

برهان. قسمت دوم، با $\Phi = \{\varphi\}$ معادل با قسمت (i) گزاره (۱۴.۱.۳)، است. نشان می‌دهیم که φ با (ترکیب عطفیِ) $\forall$-فرمولهای متناهی، T-معادل است. اما ترکیب عطفی $\forall$-فرمولها معادل با یک $\forall$-فرمول است. بنابراین قسمت (i) در این مورد می‌گوید که φ با یک $\forall$-فرمول منحصربفرد T-معادل است، که موردنظر است. □

نتیجه ۱۶.۱.۳. (۱) هر زیرمدل $\mathcal{N}$ از مدل $\mathcal{M}$ از جمله φ $(\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \models \varphi)$ مدلی از جمله ψ باشد $(\mathcal{N} \models \psi)$، آنگاه جمله عمومی $\theta_\forall$ چنان وجود دارد که یک درونیاب برای $\psi \models \varphi$ است، یعنی $\varphi \models \theta_\forall \models \psi$.

(۲) همینطور اگر هر زیرمدل $\mathcal{N}$ از مدل $\mathcal{M}$ از نظریه Φ $(\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \models \Phi)$ مدلی از نظریه Ψ باشد $(\mathcal{N} \models \Psi)$، آنگاه نظریه عمومی $\Theta_\forall$ چنان وجود دارد که $\Phi \models \Theta_\forall \models \Psi$.

فرض کنید T یک τ-نظریه باشد. گوییم $Mod\,(T)$ تحت توسیعها بسته است (یا حفظ می‌شود) اگر برای τ-ساختارهای غیرتهی $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ با شرط $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، $\mathcal{M} \models T$، $\mathcal{N} \models T$ را نتیجه بدهد.

تذکر ۱۷.۱.۳. اگر T تحت توسیعها حفظ شود، آنگاه آن همواره تحت نشاندن حفظ می‌شود، یعنی، اگر $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ و $\mathcal{M} \models T$، آنگاه $\mathcal{N} \models T$.

عکس لم دیاگرام نشان می‌دهد که اگر $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ آنگاه همواره $f : \mathcal{M} \overset{\exists}{\to} \mathcal{N}$، برای $\exists$-فرمولها که معادل نقیض $\forall$-فرمولها می‌باشند. بویژه، $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$، $\mathcal{M} \Rrightarrow_{\exists} \mathcal{N}$ را نتیجه می‌دهد، از اینرو $\exists$-جملات تحت توسیعها حفظ می‌شوند.

نتیجه زیر دوگان نتیجه (۱۵.۱.۳) می‌باشد.

نتیجه ۱۸.۱.۳. *فرض کنید T یک τ-نظریه باشد. یک τ-فرمول $\varphi(\bar{x})$ با یک $\exists$-فرمول، T-معادل است اگر و تنها اگر $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$، برای همه $\mathcal{M} \models T$ و $\mathcal{N} \models T$ با شرط $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، داشته باشیم $\mathcal{M} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{N}$، (یعنی، برای هر $\bar{a} \in M$، $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ را نتیجه بدهد).*

بویژه، داریم:

نتیجه ۱۹.۱.۳. *جمله φ (یا نظریه متناهی اصول موضوعه T) تحت توسیعها حفظ می‌شود اگر و تنها اگر φ معادل یک $\exists$-عبارت باشد.*

لم ۲۰.۱.۳. *فرض کنید Δ مجموعه‌ای از τ-جملات باشد که تحت $\bigvee$ بسته است (یعنی، اگر $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Delta$، آنگاه همواره $\bigvee_{i<n} \varphi \in \Delta$).*

یک τ-نظریه T یک Δ-نظریه است (یعنی، $T \subseteq T_\Delta$) اگر و تنها اگر، برای هر $\mathcal{M} \models T$ و هر $\mathcal{N} \models Th_\Delta(\mathcal{M})$، داشته باشیم $\mathcal{N} \models T$.

تذکر ۲۱.۱.۳. ادعا می‌کنیم که T یک Δ-نظریه است اگر و تنها اگر $T \subseteq T'_\Delta$ برای همه نظریه‌های کامل T' از T. بنابراین این لم برای هر نظریه کامل قابل تعریف است.

حال به اثبات لم بالا می‌پردازیم:

برهان. قرار دهید $\mathcal{N} \models T_\Delta$. باید بررسی کنیم که $\mathcal{N} \models T$. طبق فرض بایستی $\mathcal{M} \models T$ را پیدا کنیم بطوریکه $\mathcal{N} \models Th_\Delta(\mathcal{M})$.

مجموعه $\neg\Delta = \{\neg\delta : \delta \in \Delta\}$ را در نظر بگیرید. اگر $T \cup Th_{\neg\Delta}(\mathcal{N})$ سازگار باشد، چنین $\mathcal{M}$ وجود دارد. بنابراین سازگاری $T \cup Th_{\neg\Delta}(\mathcal{N})$ را بایستی نشان دهیم.

قرار دهید $\delta_i \in \Delta$ برای $(i < n)$ و $\mathcal{N} \models \bigwedge_{i<n} \neg\delta_i$. جمله $\bigvee_{i<n} \delta_i$ را با φ نشان می‌دهیم. آنگاه $\mathcal{N} \models \neg\varphi$ و، طبق فرض، $\varphi \in \Delta$. اگر $T \cup \{\neg\delta_i : i < n\}$ ناسازگار باشد، آنگاه $T \models \varphi$، از اینرو $\varphi \in T_\Delta$ و بنابراین همواره $\mathcal{N} \models \varphi$، که تناقض است.

در نتیجه یک مدل $\mathcal{M} \models T \cup Th_{\neg\Delta}(\mathcal{N})$ وجود دارد که، طبق تذکر (۸.۱.۳)، ممکن است مجزا از N انتخاب شود. $\square$

توجه کنید که اگر این لم را برای موردی که $\Delta = \exists$ استفاده بکنیم، می‌توانیم یک اثبات برای قضیه پایایی توسیعها بیان کنیم.

قضیه ۲۲.۱.۳. (***قضیه پایایی لوش***) *یک نظریه تحت توسیعها حفظ می‌شود اگر و تنها اگر یک $\exists$-نظریه باشد.*

برهان. براحتی دیده می‌شود که $\exists$-نظریه‌ها تحت توسیعها حفظ می‌شوند. فرض کنید نظریه T تحت توسیعها حفظ شود. ابتدا ادعای زیر را اثبات می‌کنیم.

$(***)$ $Th\,(\mathcal{N}) \cup Diag(\mathcal{M})$ برای هر ساختار $\mathcal{M}$ و همه مدلهای $\mathcal{N} \models Th_\exists(\mathcal{M})$ سازگار است.

اثبات $(***)$: قرار دهید $\varphi(\bar{a})$ یک ترکیب عطفی متناهی از جملات $Diag(\mathcal{M})$ باشد. آنگاه φ بدون سور است و $\bar{a} \in M$، و $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$. واضح است که $\mathcal{M} \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$ و از اینرو $\exists\bar{x}\varphi(\bar{x}) \in Th_\exists(\mathcal{M})$. از آنجا که $\mathcal{N} \models Th_\exists(\mathcal{M})$، همواره داریم: $\mathcal{N} \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$. پس یک چندتایی $\bar{b} \in N$ وجود دارد بطوریکه $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{b})$. آنگاه $(\mathcal{N}, \bar{b}) \models Th\,(\mathcal{N}) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$، و $(***)$ با استفاده از قضیه تمامیت نتیجه می‌شود.

برای اثبات اینکه T یک $\exists$-نظریه است، طبق لم قبلی، فقط نشان می‌دهیم که $\mathcal{N} \models T$، هرگاه $\mathcal{M} \models T$ و $\mathcal{N} \models Th_\exists(\mathcal{M})$. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ مشابه باشند. شرط $(***)$ یک مدل از $Th\,(\mathcal{N}) \cup Diag(\mathcal{M})$ نتیجه می‌دهد، که τ-تحویل است، و $\mathcal{N}'$ می‌نامیم، داریم: $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}'$ و $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$. طبق پایایی نتیجه می‌شود $\mathcal{N}' \models T$، پس $\mathcal{N} \models T$. $\square$

تعریف ۲۳.۱.۳. گوییم φ معادل با ψ به پیمانه T است اگر برای هر مدل $\mathfrak{A}$ از T و هر دنباله $\bar{a}$ از A، داشته باشیم:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}).$$

بنابراین $\varphi(\bar{x})$ معادل با $\psi(\bar{x})$ به پیمانه T است اگر و تنها اگر $T \models \forall \bar{x}(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

قضیه ۲۴.۱.۳. (***قضیه پایایی لوش-تارسکی***) *قرار دهید T یک نظریه در زبان مرتبه اول τ باشد و $\Phi(\bar{x})$ مجموعه‌ای از فرمولهای τ باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:*

(a) اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ مدلهایی از T باشند و $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ و $\bar{a}$ دنباله‌ای از عناصر A و $\mathfrak{B} \models \bigwedge \Phi(\bar{a})$، آنگاه $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Phi(\bar{a})$. ($\Phi$ تحت زیرساختارهایی برای مدلهای T حفظ می‌شود.)

(b) φ به پیمانه T با یک مجموعه $\Psi(\bar{x})$ از $\forall$-فرمولهای τ معادل است.

برهان. $(a) \Leftarrow (b)$ واضح است (چون $\forall$-فرمولها تحت زیرساختارها حفظ می‌شوند). برعکس، (a) را فرض کنید. (b) را با این فرض که Φ یک مجموعه از جملات است، اثبات می‌کنیم. قرار دهید Ψ برابر $(T \cup \Phi)_\forall$ باشد. طبق تذکر (۱۳.۱.۳)، در مدلهای محدود به T، مدلهای Ψ دقیقاً زیرساختارهایی از مدلهای Φ هستند. اما طبق (a)، هر زیرساختار خودش یک مدلی از Φ است. بنابراین Φ و Ψ به پیمانه T معادلند.

زبان $\tau(\bar{c})$ را با اضافه کردن ثوابت جدید $\bar{c}$ به τ بدست می‌آید. اگر $\Phi(\bar{x})$ تحت زیرساختارهایی از τ-ساختارها حفظ شود که مدلهایی از T هستند، آنگاه می‌بینیم که $\Phi(\bar{c})$ بایستی در زیرساختارهایی از $\tau(\bar{c})$-ساختارها که مدلهایی از T هستند، حفظ می‌شود. اما $\Phi(\bar{c})$ یک مجموعه از جملات است، بنابراین نشان می‌دهیم که $\Phi(\bar{c})$ معادل با یک مجموعه $\Psi(\bar{c})$ از $\forall$-جملات $\tau(\bar{c})$ به پیمانه T است. پس $T \models \forall \bar{x}(\bigwedge \Phi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigwedge \Psi(\bar{x}))$، بنابراین $\Phi(\bar{x})$ با $\Psi(\bar{x})$ به پیمانه T در زبان $\tau(\bar{c})$ معادل است و ازاینرو همواره در τ معادلند. $\square$

قضایایی به این شکل معروف به قضایای پایایی هستند. دیدگاه ما به قضیه لوش-تارسکی نه تنها بعنوان یک قضیه پایایی است، بلکه بعنوان یک قضیه مربوط به نحو و معناشناسی است؛ به عبارت دیگر، می‌تواند توصیف معناشناختی از فرمول مرتبه اول وجودی باشد.

نتیجه ۲۵.۱.۳. (۱) اگر هر توسیع $\mathcal{N}$ از مدل $\mathcal{M}$ از جمله φ ($\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M} \models \varphi$) مدلی از جمله ψ باشد ($\mathcal{N} \models \psi$)، آنگاه یک جمله وجودی $\theta_\exists$ درونیاب $\varphi \models \psi$ وجود دارد، یعنی $\varphi \models \theta_\exists \models \psi$.

(۲) اگر هر توسیع $\mathcal{N}$ از مدل $\mathcal{M}$ از نظریه Φ $(\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M} \models \Phi)$ مدلی از نظریه Ψ باشد $(\mathcal{N} \models \Psi)$، آنگاه یک نظریه وجودی $\Theta_\exists$ چنان وجود دارد که $\Phi \models \Theta_\exists \models \Psi$.

$U_۱$ و $U_۲$ را محمولات تک موضعی جدید فرض کنید که در زبان φ نباشند، و قرار دهید $\mathbb{U} = \{U_۱, U_۲\}$. قرار دهید φ^{U_i} نتیجه نسبی‌سازی شده فرمول φ در U_i باشد. آنگاه پایایی تحت توسیعها برای φ با شرط معتبر زیر بیان شده است:

$$\forall x(U_۱ x \to U_۲ x) \wedge \bigwedge U_i \mathbf{x} \wedge \varphi^{U_۱}(\mathbf{x}) \models \varphi^{U_۲}(\mathbf{x}).$$

توجه کنید که همه فرمولهای ظاهر شده در اینجا $\mathbb{U}$-نسبی‌شده هستند. قضیه (۸.۱.۲) یک درونیاب $\mathbb{U}$-نسبی‌شده $\chi(\mathbf{x})$، بدون ظاهر شدن $U_۱$ و تنها با مثبت ظاهر شدن $U_۲$، بدست می‌دهد. در نتیجه χ کاملاً وجودی است. با توجه به حالت ویژه که $U_۱ = U_۲$ در فرض، در می‌یابیم که $\bigwedge U_۲\mathbf{x} \wedge \varphi^{U_۲} \models \chi \models \varphi^{U_۲}$. علاوه بر این محدود کردن با توجه به مورد $\forall x U_۲ x$ در این ترکیبات شرطی، در χ همه اتمهای $U_۲ y$ را با $\top$ جایگزین می‌کنیم تا یک فرمول χ' بدست آید، که در زبان φ، کاملاً وجودی می‌باشد، و معادل φ است، از آنجا که در این حالت ویژه هر دوی $\bigwedge U_۲\mathbf{x} \wedge \varphi^{U_۲}$ و $\varphi^{U_۲}$ معادلِ φ هستند. توجه کنیم که ارتباط مشابه بین پایایی وجودی و شرایط درونیابی چندگونه (در بخش بعدی بررسی می‌شود)، به عنوان یک کاربرد برای درونیابی چندگونه توسط فِفِرمن در [۸] بحث شده است.

بطور معمول، بحثی مشابه قضیه پایایی کلاسیک متمرکز بر یکنواختی و مثبت بودن (روشی که بطور مستقیم از قضیه درونیابی لیندون نتیجه می‌شود) ارائه می‌دهد. نکته ظریف در بالا این است که پدیده‌های پایایی توسیع/وجودی و یکنواختی/مثبت بودن، همانند آن که در تصویر نسبی‌شده حاضر بود، به منبع مشابه نسبت داده می‌شوند.

۲.۳ قضیه درونیابی چندگونه

منطق مرتبه اول n-گونه را در یک زبان رابطه‌ای در نظر بگیرید. در اینجا فرض می‌کنیم که تمام محمولات و متغیرها نسبت به گونه‌ها نوشته می‌شوند و گونه‌ها از هم مجزا هستند. ترجمه

استاندارد در چارچوب تک‌گونه، تبدیل یک ساختار رابطه‌ای چندگونه $(A_1, \ldots, A_n, R, \ldots)$ با گونه‌های مجزای A_i داخل یک ساختار است که جهان A (یک ابرمجموعه دلخواه) $\bigcup A_i$ است که محمولات تک موضعی جدید $U_1, \ldots, U_n$ را دارد که زیردامنه‌های متفاوت با گونه‌های متفاوت را نشان می‌دهد. اگر $\mathbb{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ را در نظر بگیریم، فرمول مرتبه اول چندگونه بطور طبیعی به فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده ترجمه می‌شود. باید توجه شود اگر متغیرهای آزاد وجود داشته باشند: تا زمانیکه در چارچوب چندگونه هر متغیر آزاد به گونه خاص خود، به طور تلویحی محدود می‌شود، متناظراً در تحدید معناشناسی این تبدیل بطور صریحی صورت می‌گیرد. باید همواره نسبت به ترجمه ترکیبات شرطی توجه شود. یک ترکیب شرطی معتبر چندگونه به یک ترکیب شرطی تک‌گونه $\mathbb{U}$-نسبی‌شده تبدیل می‌شود فقط این تحدید در ساختارهای تک‌گونه‌ای صورت می‌گیرد که باعث رمزنگاری اصلی ساختارهای چندگونه می‌شوند. این‌ها ساختارهایی هستند که U_s مجزا دارند. هر رابطه R به حاصلضرب زیردامنه‌های U_s مطابق به گونه مشخص آن محدود می‌شود، و هر متغیر آزاد x_i به عنصری از $U_{s(i)}$ که مطابق با گونه آن است، تعبیر می‌شود. اما برای فرمول چندگونه خوش‌ساخت (به فرمول چندگونه، خوش‌ساخت می‌گوییم زمانیکه هر متغیر آن از گونه مناسب انتخاب شود)، تحدید مربوط به تعبیر رابطه‌های R، غیر ضروری است زیرا هرچند R-اتمها از گونه‌های نامناسب باشند باز تاثیری در معناشناسی فرمول ترجمه نمی‌گذارند. (به شرطی که متغیرهای آزاد به گونه‌های مناسب محدود شوند). تحدید متغیرهای آزاد به گونه‌های مربوطه خود، صریحاً در زیر ساخته شده است. بنابراین آنچه باقی مانده است مشکل آشکار در مورد مجزا بودن در مقابل اشتراک زیردامنه‌های U_s است، که در پرتو تبدیل معکوس زیر حل و فصل شده است. قرار دهید $\mathfrak{A} = (A, U_1, \ldots, U_n, R, \ldots)$ یک ساختار دلخواه گونه معین شده با $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ بطوریکه $a_i \in U^{\mathfrak{A}}_{s(i)}$ برای $i = 1, \ldots, k$، باشد. برای یک رابطه r-موضعی R از گونه $(s_1, \ldots, s_r)$، قرار دهید $\check{U}_s = U^{\mathfrak{A}}_s \times \{s\}$، و

$$\check{R} = \{\mathbf{a} = ((a_1, s_1), \ldots, (a_r, s_r)) \mid (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}}\}.$$

اگر $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ یک فرمول چندگونه خوش‌ساخت با متغیر آزاد x_i از گونه $S_{s(i)}$ باشد، و $\varphi^{\mathbb{U}}$ نتیجه نسبی‌سازی هر سور در φ به U_s مناسب باشد، آنگاه

$$.\mathfrak{A} \models \varphi^{\mathbb{U}}[\mathbf{a}] \iff (\check{U}_1, \ldots, \check{U}_n, \check{R}, \ldots) \models \varphi[(a_1, s_1), \ldots, (a_k, s_k)]$$

توجه داشته باشید حتی زمانیکه φ دارای تساوی باشد، نیز درست است، زیرا این نوع φ، این مفهوم را می‌رساند که اتم تساوی فقط می‌تواند متغیرهایی از همان گونه را بهم متصل کند. با این مفروضات ذهنی، یک ترکیب شرطی معتبر چندگونه $\varphi \models \psi$، با ترکیبی از متغیرهای آزاد $x_1, \ldots, x_k$، x_i از گونه $s(i)$، را پیدا می‌کنیم که ترکیب شرطی تک‌گونه معتبر میان فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده را نتیجه می‌دهد:

$$\bigwedge_{x_i \in free(\varphi)} U_{s(i)} \wedge \varphi^{\mathbb{U}} \models \bigwedge_{x_i \in free(\psi)} U_{s(i)} \to \psi^{\mathbb{U}} \qquad (1.3)$$

که $\varphi^{\mathbb{U}}$ و $\psi^{\mathbb{U}}$ نتیجه نسبی‌سازی هر سور در این فرمول با گونه مناسب هستند.

اولین حالت را اختصاص می‌دهیم به اینکه φ و ψ، دارای متغیرهای آزاد $x_1, \ldots, x_k$ مشترک باشند. این فرض تجزیه و تحلیل را ساده‌تر می‌کند، اما حالت کلی در اصل آن را کاهش می‌دهد: اگر $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و $\psi = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ با تمام متغیرهای آزاد ذکر شده و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ زوجهای مجزا باشند، آنگاه $\varphi \models \psi$ نتیجه می‌دهد $\exists \mathbf{y}\ \varphi \models \forall \mathbf{z}\ \psi$؛ علاوه بر این، بطور خودبخود یک درونیاب مناسب برای ترکیب شرطی اخیر $\varphi \models \psi$، نیز است. حال باید به حالت کلی زیر برگردیم.

$free - sorts$ را مجموعه‌ای از گونه‌هایِ متغیرهای آزاد φ و ψ در نظر بگیرید. با مساوی قرار دادن یک گونه با رمزنگاری محمول U آن، ممکن است $free - sorts$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{U}$ تصور کنیم. با کاربرد مستقیم قضیه (۸.۱.۲) در ترکیب شرطی (۱.۳) یک درونیاب $\chi(x_1, \ldots, x_k)$ نتیجه می‌شود که $\mathbb{U}$-نسبی‌شده است و

$$.occ(\chi) \subseteq (occ(\varphi^{\mathbb{U}}) \cup free - sorts \times \{+\}) \cap (occ(\psi^{\mathbb{U}}) \cup free - sorts \times \{-\}) \qquad (2.3)$$

حال χ از ابتدا بفرمی نیست که بلافاصله به فرمول چندگونه ترجمه شود. اما توجه کنید، از آنجا که $\bigwedge_i U_{s(i)} x_i \wedge \varphi^{\mathbb{U}} \models \chi(x_1, \ldots, x_k)$، ممکن است تمام متغیرهای آزاد χ از نوع مناسب فرض شده باشند. حذف تمام محمولات به اشتباه ظاهر شده R در χ باقی مانده است، و همه محمولات ظاهر شده U_s جدا از تکرار صریحاً نسبی‌سازی می‌شوند. بدون کاستن از کلیت، هر متغیر کراندار در χ

کاملاً یکبار سوری‌سازی می‌شود، و در نتیجه گونه‌ای منحصر بفرد به آن نسبت داده می‌شود. هر R-اتم در χ که ممکن است در این روش از یک گونه نامناسب بدست آید توسط $\perp$ جایگزین می‌شود، همان که برای اتمهای $U_s y$، هر زمان y یک متغیر نسبت داده شده به هر گونه متفاوت از U_s باشد، صورت می‌گیرد. بدیهی است فرمولِ نتیجه شده χ' یک درونیاب مناسب برای ترکیب شرطی (۳.۱) است، در تحدید همه ساختارهایی که به عنوان رمزگذاری تک‌گونه ساختارهای چندگونه بوجود می‌آیند. همچنین مشاهده می‌شود که هیچ‌یک از این مهارتها رخدادهای جدیدی را معرفی نمی‌کنند. بنابراین χ' ممکن است یک فرمول چندگونه خوش‌ساخت تلقی شود، که $\psi \models \chi'$ و $\chi' \models \varphi$ ترکیبات شرطی چندگونه معتبر هستند.

حال برای محمولات ظاهر شده در χ (یا در χ'): با توجه به محمولات در زبان اصلی φ و ψ، داریم $occ(\chi') \subseteq occ(\chi) \subseteq occ(\varphi) \cap occ(\psi)$، که انتظار می‌رود (۲.۳) یک نوع چندگونه درونیابی لیندون باشد. علاوه بر این، $\mathbb{U}$-رخدادها می‌توانند برای تجزیه و تحلیل گونه‌هایی که سوری‌سازی شده وجودی یا عمومی شده‌اند، استفاده شوند.

فرض کنید $\exists - sotrs(\varphi)$ نشان‌دهنده مجموعه‌ای از گونه‌هایی باشد که در φ سوری‌سازی وجودی شده‌اند، و $\forall - sorts(\varphi)$ نشان‌دهنده مجموعه‌ای از گونه‌هایی باشد که در φ سوری‌سازی عمومی شده‌اند، (صورت نرمال منفی φ را در نظر بگیرید)، و $sorts(\varphi)$ را مجموعه‌ای از گونه‌های ظاهرشده در φ قرار دهید.

سپس (۲.۳) بیان می‌کند که $sorts(\chi') \subseteq sorts(\varphi) \cap sorts(\psi)$ و

$$\exists - sorts(\chi') \subseteq \exists - sorts(\psi) \cap (\exists - sorts(\varphi) \cup free - sorts)$$
$$\forall - sorts(\chi') \subseteq \forall - sorts(\varphi) \cap (\forall - sorts(\psi) \cup free - sorts).$$

در حالت کلی فرمولهای $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ را که نیازی به متغیرهای آزاد یکسان ندارند، در نظر بگیرید. عبارت $\exists \mathbf{y}\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و $\exists \mathbf{z}\ \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ همواره یک درونیاب متناظر برای $\psi \models \varphi$ بدست می‌آورد، که متغیرهای آزاد آن در میان متغیرهای مشترک φ و ψ هستند. با توجه به گونه‌های سوری‌سازی شده وجودی (عمومی) در تجزیه و تحلیل فوق، $\exists - sorts(\varphi)$ را با $\exists - sorts(\varphi) \cup \exists$ $free - sorts(\varphi)$ و $\forall - sorts(\psi)$ را با $\forall - sorts(\psi) \cup free - sorts(\psi)$ جایگزین می‌کنیم. همه چیز بدون تغییر باقی می‌ماند. در نتیجه قضیه درونیابی چندگونه به شرح زیر بدست می‌آید، که

مربوط به قضیه درونیابی چندگونه فِفِرمن [۷، ۸] است و توسط اِستِرن در [۱۷] تعمیم داده شده است.

گزاره ۱.۲.۳. *فرض کنید φ و ψ فرمولهای رابطه‌ای چندگونه باشند. اگر $\varphi \models \psi$ یک ترکیب شرطی معتبر باشد، آنگاه یک درونیاب لیندون چندگونه χ برای $\varphi \models \psi$* **وجود دارد**، *یعنی، یک فرمول چندگونه χ چنان* **وجود دارد** *که $\varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi$، و*

(i) $free(\chi) \subseteq free(\varphi) \cap free(\psi)$.

(ii) $sorts(\chi) \subseteq sorts(\varphi) \cap sorts(\psi)$.

(iii) $occ(\chi) \subseteq occ(\varphi) \cap occ(\psi)$.

(iv) $\exists - sorts(\chi) \subseteq \exists - sorts(\psi) \cap (\exists - sorts(\varphi) \cup free - sorts(\varphi))$,

$\forall - sorts(\chi) \subseteq \forall - sorts(\varphi) \cap (\forall - sorts(\psi) \cup free - sorts(\psi))$.

توجه داشته باشید که در مورد جملات (یعنی، بدون متغیرهای آزاد) شرط (iv) می‌گوید که یک گونه، در χ سوری‌سازی شده وجودی (عمومی) می‌شود فقط اگر در آن هر دوی φ و ψ سوری‌سازی شده وجودی (عمومی) باشد. بنابراین نتیجه زیر حالت ویژه‌ای از قضیه اِستِرن می‌باشد که در [۱۷] بیان شده است.

نتیجه ۲.۲.۳. *(اِستِرن)*
برای جملات رابطه‌ای چندگونه φ و ψ بدون متغیرهای آزاد: اگر $\varphi \models \psi$ یک ترکیب شرطی باشد، آنگاه یک درونیاب لیندون چندگونه χ برای $\varphi \models \psi$ **وجود دارد**، *یعنی، یک جمله چندگونه χ چنان* **وجود دارد** *که $\varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi$، و*

(i) $sorts(\chi) \subseteq sorts(\varphi) \cap sorts(\psi)$.

(ii) $occ(\chi) \subseteq occ(\varphi) \cap occ(\psi)$.

(iii) $\exists - sorts(\chi) \subseteq \exists - sorts(\psi) \cap \exists - sorts(\varphi)$,

$\forall - sorts(\chi) \subseteq \forall - sorts(\varphi) \cap \forall - sorts(\psi)$.

اما همواره برای فرمولهای با متغیر آزاد، ممکن است ترکیب شرطی (۱.۳) استفاده شود و تعمیم نوع شرایط $U_{s(i)}x_i$ در چنین روشی مطابق با نوع محمولات ظاهر شده میان فرض و حکم به حداقل

می‌رسد. بویژه، بدیهی است شرایط متغیرهای مشترک آزاد نیازی به تکرار در هر دو طرف ندارند. در این روش، برای نمونه در مورد φ و ψ که متغیرهای آزاد مشترک دارند (از گونه‌های $free - sorts$)، که برای مجموعه‌های F_1 و F_2 از گونه‌ها، بطوریکه $free - sorts \subseteq F_1 \cup F_2$، شرط (iv) با شرط زیر جایگزین می‌شود

$$(iv')\ \exists - sorts(\chi) \subseteq \exists - sorts(\psi) \cap (\exists - sorts(\varphi) \cup F_1),$$
$$\forall - sorts(\chi) \subseteq \forall - sorts(\varphi) \cap (\forall - sorts(\psi) \cup F_2).$$

تغییرات مشابه صریحاً در تعمیم استرن از قضیه فِفِرمن، قضیه ۲.۱ در [۱۷] است. بویژه، قضیه درونیابی چندگونه اصلی فِفِرمن [۷، ۸] متناظر با گزاره (۱.۲.۳) به شرح زیر است:

قضیه ۳.۲.۳. **(فِفِرمن)** *فرض کنید φ و ψ فرمولهای رابطه‌ای چندگونه باشند. اگر $\varphi \models \psi$ یک ترکیب شرطی معتبر باشد، آنگاه درونیاب چندگونه χ، $\varphi \models \chi$ و $\chi \models \psi$، وجود دارد بطوریکه*

$(i)\ free(\chi) \subseteq free(\varphi) \cap free(\psi).$

$(ii)\ sorts(\chi) \subseteq sorts(\varphi) \cap sorts(\psi).$

(iii) *همه محمولات در χ در هر دوی φ و ψ ظاهر می‌شوند.*

$(iv)\ \exists - sorts(\chi) \subseteq \exists - sorts(\psi),\ \ \forall - sorts(\chi) \subseteq \forall - sorts(\varphi)$

توانایی قضیه درونیابی چندگونه فِفِرمن در کاربردهای متعددی در [۷، ۸] و نیز در [۱] نشان داده شده است. بویژه، قضیه پایایی کلاسیک توسیع/وجودی همواره بطور مستقیم از آن، همانطور که قبلاً ذکر شد، نتیجه می‌شود. در مقایسه با نوع کامل قضیه فِفِرمن، قضیه (۱.۲.۳) فقط مربوط به منطق مرتبه اول بجای منطقهای با عطف و فصل نامتناهی می‌باشد. از سوی دیگر نوع ما (درست مانند تقویت اِسترِن) فراتر از قضیه فِفِرمن در دو جهت دیگر، صرفنظر از اینکه در طول خطوط بسیار متفاوت به دست آمده: شرط لیندون در قطبی‌سازی محمولات ظاهرشده، در قضیه (۳.۲.۳) غائب است و شرط گونه‌های سوری‌سازی شده وجودی و عمومی متقارن است و به طور کلی قوی‌تر از شرایط مربوط در قضیه فِفِرمن می‌باشند.[۱]

[۱] شایان ذکر است که این واقعیت به این دلیل است که نوع‌های ما الزاماً ناتهی نیستند؛ استفاده از شرایط صریح در فرمول اصلی باز هم شرایط محدودتر و متقارن‌تری را نسبت به بحث در [۷، ۸] نتیجه می‌دهد.

۳.۳ قضیه پایایی فون بِنثِم

قبل از بیان قضیه پایایی فون بِنثِم، مطالبی را در مورد فضاهای چو یادآور می‌شویم.

۱.۳.۳ تعاریف و قضایای مربوط به فضای چو

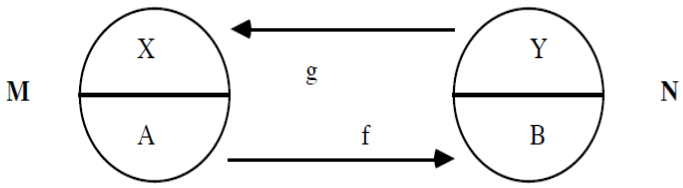
فضاهای چو یک مدل جدید در ساختار اطلاعات و بطور کلی در ساختار ریاضی می‌باشند. خواص آنها معمولاً به عنوان صورتی از رسته‌های توسعه یافته می‌باشد. نشان می‌دهیم چگونه آنها نیز ممکن است به عنوان مدلهایی برای یک زبان مرتبه اول دوگونه نمایش داده شوند، و جریان دقیق از اطلاعات در سراسر تبدیل چو طبیعی را تعیین می‌کنیم.

۲.۳.۳ فضای چو

فضای چو دو ارزشی یک ساختار (A, X, R) با دامنه‌های A و X و یک رابطه دوتایی R داخل $A \times X$ می‌باشد. برای مثال: $R = $ " $\in$ "، «مجموعه‌ها» $= X$، «اشیاء» $= A$ و یا " $\models$ " $= R$، «فرمولها» $= X$، «مدلها» $= A$ و یا «رده‌بندی» $= R$، «نوعها» $= X$، «نشانه‌ها» $= A$.
فضاهایی چنین به طور طبیعی به عنوان مدلهایی برای زبان مرتبه اول دوگونه با متغیرهایی روی (همانگونه که خواهیم گفت) «اشیاء» و متغیرهای x روی «نوعها» در نظر گرفته می‌شوند. البته، همچنین می‌توانید زبانهای دیگر توسعه یافته منطق مرتبه اول را در اینجا استفاده کنید، مانند آنهایی که نامتناهی یا مرتبه دوم هستند. فضاهای عمومی چو یک R رابطه k-موضعی هستند، اما در عمل مثالهای دوگونه برتری دارند. در ادامه، برای راحتی نماد " $\in$ " را در سراسر فضای چو استفاده می‌کنیم.

۳.۳.۳ تبدیلات چو

تبدیل چو میان دو فضای چو $M = (A, X, \in)$ و $N = (B, Y, \in)$ یک جفت از توابع $f : A \to B$ و $g : Y \to X$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:



for all a∈A, y∈Y: f(a)∈y ⇔ a∈g(y)

۴.۳.۳ فرمولهای پایایی و جریان

چه اطلاعاتی در کلیدزنی بین فضاهای چو متصل با چنین تبدیلی حفظ می‌شود؟ می‌توانیم این را به عنوان یک سوال در نظریه مدل استاندارد مشاهده کنیم که درخواستی برای قضیه پایایی است. مفهوم نحوی زیر انعکاس آنچه که داریم را روشن می‌سازد:

فرمول جریان، فرمول مرتبه اولی است که با شِمای زیر تولید می‌شود:

$$a \in x \mid \neg a \in x \mid \wedge \mid \vee \mid \exists a \mid \forall x$$

فرمولهای جریان $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_m)$ می‌توانند مفاهیم مفید زیادی را در فضاهای چو تعریف کنند: بطور کلی، روابط میان k شیء و m نوع. در اینجا چند نمونه آورده شده است:

«شمول اشیاء»	$\sqsubset$	$\forall x(\neg a_1 \in x \vee a_2 \in x)$
«ناسازگاری اشیاء»	$\boxminus$	$\forall x(\neg a_1 \in x \vee \neg a_2 \in x)$
«اشتراک نوع»	$\mathbf{o}$	$\exists a(a_1 \in x \wedge a_2 \in x)$

تعریف ۱.۳.۳. ϕ را فرمول مرتبه اول چو-حفظ شده می‌نامیم اگر داشته باشیم (نمادهای تیره، چندتاییهای متناهی «مناسب» از اشیاء و نوعها را نشان می‌دهد):

$$\mathbf{M}, \mathbf{a}, \mathbf{g(y)} \models \phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}, \mathbf{f(a)}, \mathbf{y} \models \phi$$

هرگاه (f, g) یک تبدیل چو میان $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ باشد.

البته، این مفهوم نیز برای فرمولهای غیر مرتبه اول ϕ نیز برقرار است.

گزاره ۲.۳.۳. همه فرمولهای جریان، چو حفظ شده است.

برهان. این استقراء در تعریف فوق، با مشخصه چو در هم‌ارزی $f(a) \in y \Leftrightarrow a \in g(y)$ برای فرمولهای اتمی یا نقیض آنها شروع می‌شود. □

تذکر ۳.۳.۳. تبدیلات چو با توجه به شمول اشیاء یکنواخت هستند.

تذکر ۴.۳.۳. ما فقط پایایی را در جهت f تشریح می‌کنیم. اما برعکس، در جهت g، توصیف نحوی فرمول حفظ شده به شرح زیر است (با وارد کردن نقیض در داخل ترکیب شرطی معادل می‌شود با "$\mathbf{N} \models \neg\phi \Rightarrow \mathbf{M} \models \neg\phi$"):

$$a \in x \mid \neg a \in x \mid \wedge \mid \vee \mid \forall a \mid \exists x$$

این نتیجه دقیقاً همان دوگانگی فضاهای چو را پیش‌بینی می‌کند، که در آن تبادل نقش A و X تفاوتی نمی‌کند.

۵.۳.۳ پایایی جریان، تبدیل چو در مدلهای متناهی را نتیجه می‌دهد

فقط فرمولهای جریان تحت تبدیلات چو حفظ می‌شوند. قبل از اثبات این، به یک نتیجه الهام گرفته شده از منطق شهودی می‌پردازیم.

گزاره ۵.۳.۳. برای فضاهای چو متناهی $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$، ادعاهای زیر معادلند:

۱. یک تبدیل چو از $\mathbf{M}$ به $\mathbf{N}$ وجود دارد.

۲. هر جمله جریان درست در $\mathbf{M}$، در $\mathbf{N}$ نیز درست است.

برهان. (۲) $\rightarrow$ (۱)، حالت ویژه‌ای از گزاره قبلی می‌باشد. اثبات (۱) $\rightarrow$ (۲)، بشرح زیر است: A و Y را بترتیب بصورت $\{a_1, \cdots, a_k\}$ و $\{y_1, \cdots, y_m\}$ می‌شماریم. مرحله به مرحله تابع f موردنظر را می‌سازیم. (تابع g را نیز مشابهاً می‌سازیم.) ایده این است که تدریجاً f را به شیء $f(a) \in B$ در $a \in A$ که در خواص جریان صدق می‌کند، نسبت دهیم. فرض کنید که هیچ $b \in B$ در خواص جریان که برای $a_1 \in \mathbf{M}$ صدق می‌کند، وجود ندارد. به این معنی است که برای فرمول جریان γ_b، داریم:

$$.\mathbf{M}, a_1 \models \gamma_b \not\Rightarrow \mathbf{N}, b \models \gamma_b$$

بنابراین، $\mathbf{M}$ در فرمول جریان صدق می‌کند (اینجا از $\wedge \mid \exists$-بستار استفاده می‌کنیم):

$$.\exists a \ \wedge_{b\in B} \gamma_b$$

اما طبق شرط (۲)، فرمول اخیر باید در $\mathbf{N}$ برقرار باشد. اما هر $b \in B$ بعنوان یک شاهد رد صلاحیت می‌شود، از آنجا که «آن» فاقد ترکیب عطفی γ_b است. بنابراین، طبق برهان خلف، یک انتخاب مناسب b_1 باید وجود داشته باشد، و می‌توانیم قرار دهیم

$$.f(a_1) = b_1$$

این استدلال را می‌توان با تکرارهای متوالی برای تولید مقادیر f در همه A بکار برد. علاوه بر این، همواره می‌توان آن را در جهت مخالف برای پیدا کردن مقادیر تابع g مورد استفاده قرار داد، که دوباره فرمولهای جریان از $\mathbf{M}$ به $\mathbf{N}$ بدون تغییر حفظ می‌شوند. یعنی، در موقع جستجوی یک x مناسب برای y_1، فرض می‌کنیم هر x_iای که برای این هدف برقرار نباشد با یک δ_y رد می‌شود، و سپس با استفاده از یک فرمول جریان بصورت (با استفاده از دوگان $\vee \mid \forall$-بستار)

$$\forall x \vee_{y\in Y} \delta_y$$

یک تناقض از $\mathbf{M}$ به $\mathbf{N}$ بدست می‌آید. □

۶.۳.۳ قضیه پایایی مرتبه اول

تعریف ۶.۳.۳. می‌گوییم ϕ در امتداد تبدیلات چو ψ را نتیجه می‌دهد اگر همواره، مدلهای $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ از طریق f, g چو-نسبی‌شده باشند:

$$.\mathbf{M}, \mathbf{a}, \mathbf{g(y)} \models \phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}, \mathbf{f(a)}, \mathbf{y} \models \psi$$

پس می‌توانیم قضیه زیر را داشته باشیم:

قضیه ۷.۳.۳. *برای همه فرمولهای مرتبه اول ϕ و ψ، دو جمله زیر معادلند:*

۱. ϕ *در امتداد تبدیلات چو* ψ *را نتیجه می‌دهد.*

۲. *یک فرمول جریان* α *وجود دارد بطوریکه* $\phi \models \alpha \models \psi$.

برهان. اثبات (۱) $\rightarrow$ (۲)، مثل اثبات گزاره (۵.۳.۳) می‌باشد. برای اثبات (۲) $\rightarrow$ (۱)، فرض کنید که ϕ در امتداد تبدیلات چو ψ را نتیجه دهد. ابتدا، تعریف می‌کنیم

$$FF(\phi) =_{def} \{\alpha \mid \phi \models \alpha \text{ یک فرمول جریان }\}.$$

ادعا می‌کنیم که $FF(\phi) \models \psi$. کافیست این ادعا را ثابت کنیم.
درونیاب جریان مورد نیاز است که توسط فشردگی وجود دارد. بنابراین هر مدل شمارش‌پذیر $\mathbf{N} = (B, Y, \in)$ را برای $FF(\phi)$ در نظر بگیرید. (در این مورد قضیه لونهایم-اسکولم کافی است.) قرار دهید $Th_{\neg FF}(\mathbf{N})$ مجموعه‌ای از تمام $\mathbf{N}$-درست منفی‌هایی از جملات جریان باشد. با استفاده از بسته بودن فرمولهای جریان تحت ترکیب فصلی، داریم

$$Th_{\neg FF}(\mathbf{N}) \cup \{\phi\} \text{ متناهیاً ارضاپذیر است.}$$

بنابراین، یک مدل (شمارش‌پذیر) $\mathbf{M} = (A, X, \in)$ برای $Th_{\neg FF}(\mathbf{N}) \cup \{\phi\}$ وجود دارد بطوریکه ترکیب شرطی زیر برای همه فرمولهای جریان γ برقرار است:

$$\mathbf{M} \models \gamma \Rightarrow \mathbf{N} \models \gamma.$$

بدون کاستن از کلیت، حتی می‌توانیم فرض کنیم که $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ یک جفت مدل اشباع‌شده بازگشتی است که همان خواص تبدیل را دارد. یک نکته در مورد اشباع‌شده بازگشتی این است که: هر مدل شمارش‌پذیر یک توسیع بازگشتی اشباع‌شده مقدماتی دارد. (طبق نتیجه ۴۲.۱.۲).
اما، می‌توانیم برای مدلهای متناهی به آسانی این بحث را با استفاده از اشباع‌شده بازگشتی داشته باشیم. A و Y را بترتیب $(a_1, a_2, \ldots)$ و $(y_1, y_2, \ldots)$ می‌شماریم. در حالت کلی، فرض کنید که بخش متناهی از جفت (f, g) در حال حاضر ساخته شده است. بعلاوه، فرض کنید که تمام فرمولهای جریان متغیرهای آزادِ مجموعه‌ای از اشیاء a در دامنه f و نوع $g(y)$ برد g در $\mathbf{M}$ هستند، و متناظراً $f(a)$، y در $\mathbf{N}$، در ترکیب شرطی زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{M}, \mathbf{a}, \mathbf{g(y)} \models \gamma \Rightarrow \mathbf{N}, \mathbf{f(a)}, \mathbf{y} \models \gamma \quad (*).$$

پس می‌توانیم این وضعیت را در هر دو روش توسیع دهیم. در اینجا این مورد برای اشیاء در $\mathbf{M}$ (برای انواع در $\mathbf{N}$ نیز مشابه است). a^* را اولین شیء در A بدون f-ارزشی قرار دهید. مجموعه تمام فرمولهای بازگشتی را به شکل زیر در نظر بگیرید، که γ روی فرمولهای جریان در ترکیب شرطی قبلی -بجز یک متغیر شیء آزاد $\underline{a}$ در طرف راست- اجرا می‌شود:

$$.\gamma^M(\mathbf{a}, \mathbf{g(y)}, a^*) \to \gamma^N(\mathbf{f(a)}, \mathbf{y}, \underline{a})$$

این مجموعه در جفت مدل $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ متناهیاً ارضاپذیر است، زیرا برای تعداد متناهی از خواص جریان γ_i، a^* در $\mathbf{M}$، می‌توانیم عبارت جریان زیر را تشکیل دهیم (با استفاده از $\wedge|\exists$-بستار):

$$.\exists a \wedge_i \gamma_i(\mathbf{a}, \mathbf{g(y)}, a)$$

که همواره در $\mathbf{N}$ درست است (براحتی با تبدیل ترکیب شرطی $(*)$). بنابراین می‌توانیم یک مقدار برای $\underline{a}$ در B که در همه ترکیبات شرطی متناهی صدق می‌کند را پیدا کنیم. اما، البته اشباع‌شده بازگشتی است، حتی وجود دارد برخی $b \in B$ که در سراسر مجموعه ترکیبات شرطی جریان بطور همزمان صدق می‌کند، و می‌توانیم این شیء موردنظر f-ارزشی را برای شیء a^* بدست آوریم. استدلال در جهت مخالف، تولید یک g-ارزشی در $\mathbf{M}$ برای اولین نوع $y \in Y$، مشابه است، اما از فرمولهای جریان $\wedge|\forall$-بستار استفاده می‌کنیم. سرانجام داریم $\mathbf{M} \models \phi$، $\mathbf{N}$ یک تبدیل چو از $\mathbf{M}$ است، و پس $\mathbf{M} \models \psi$. □

نتیجه ۸.۳.۳. برای همه فرمولهای مرتبه اول ϕ، دو جمله زیر معادلند:

۱. ϕ تحت تبدیلات چو حفظ می‌شود.

۲. یک فرمول جریان α منطقاً معادل با ϕ وجود دارد.

برهان. کافیست در قضیه قبلی مجموعه ψ را معادل با ϕ قرار دهیم. □

۷.۳.۳ قضیه پایایی فون بِنثِم

این نتیجه رده‌بندی جدید [۲] در زمینه فضاهای چو (روی $\{۰, ۱\}$)، بعنوان ساختارهای رابطه‌ای دوگونه در یک دوتایی E از نوع $(۱, ۲)$ در نظر گرفته شده است. می‌گوییم که E تعبیری از

زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی گونه اول و دوم است.

تعریف ۹.۳.۳. تبدیل چو بین دو جمله E-ساختارهای دوگونه $\mathfrak{A} = (A_۱, A_۲, E^{\mathfrak{A}})$ و $\mathfrak{B} = (B_۱, B_۲, E^{\mathfrak{B}})$، یک جفت نگاشت $f : A_۱ \to B_۱$ و $g : A_۲ \to B_۲$ است بطوریکه برای هر $a \in A_۱$ و $\beta \in B_۲$:

$$(a, g(\beta)) \in E^{\mathfrak{A}} \Longleftrightarrow (f(a), \beta) \in E^{\mathfrak{B}}.$$

توجه کنید که گونه اول تحت تبدیل چو یک همریختی است، در حالیکه گونه دوم تحت این تبدیل یک معکوس همریختی می‌باشد. تبدیل چو به شرح زیر است:

(a) توسیعها در گونه اول:

$$A_۱ \subseteq B_۱, A_۲ = B_۲, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, f, g = id.$$

(b) تحدیدها در گونه دوم:

$$A_۱ = B_۱, A_۲ \supseteq B_۲, \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}, f, g = id.$$

متغیرهای گونه اول را با x و گونه دوم را با v نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۳.۳. فرمول مرتبه اول دوگونه $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ تحت تبدیل چو حفظ می‌شود اگر، هرگاه f, g یک تبدیل چو از $\mathfrak{A}$ به $\mathfrak{B}$ تشکیل دهد، و اگر $\mathbf{a} \in (A_۱)^n$ و $\beta \in (B_۲)^m$، آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\mathbf{a}, g(\beta)] \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\mathbf{a}), \beta].$$

تعریف ۱۱.۳.۳. فرمول چندگونه $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ در این چارچوب دوگونه، فرمول جریان نامیده می‌شود اگر بدون تساوی باشد و در گونه اول کاملاً وجودی و در گونه دوم کاملاً عمومی باشد.

قضیه زیر بصورت کاملاً نظریه مدلی در بخش قبل اثبات شده است. ارتباط آن با قضایای درونیابی چندگونه فِفِرمن و اِسترن نیز در عین حال در [۹] شرح داده شده است.

قضیه ۱۲.۳.۳. (**فون بِنثِم**) *فرمولهایی که تحت تبدیلات چو حفظ می‌شوند دقیقاً همان فرمولهایی هستند که منطقاً معادل با فرمول جریان هستند.*

برهان. این قضیه، کاربردی از قضیه درونیابی جدیدی است که اثبات کرده‌ایم. مشابه قضیه (۷.۳.۳) اثبات می‌شود.

فرض کنید $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ یک فرمول مرتبه اول دوگونه بدون تساوی باشد که تحت تبدیل چو نوع (a) و (b) حفظ می‌شوند. برای اثبات قضیه فون بنِثِم می‌خواهیم یک فرمول جریان φ^* بدست آوریم (با توجه به گونه اول کاملاً وجودی و با توجه به گونه دوم کاملاً عمومی باشد) که معادل با φ است. φ^* را بعنوان یک درونیاب در کاربردی از قضیه اصلی (در دستگاه بدون تساوی) برای رمزنگاری طبیعی ساختار تک‌گونه در فضاهای چو را بدست می‌آوریم. بترتیب، محمولات تک-موضعی U و V را زیردامنه‌های متناظر با گونه اول و دوم در نظر می‌گیریم. قرار دهید $\varphi^{\mathbb{U}}$ نتیجه نسبی‌سازی همه سورهای φ مطابق با U یا V باشد. رفتار قضیه درونیابی چندگونه به روشنی در بالا مطرح شده است. حال کافی خواهد بود نشان دهیم که $\varphi^{\mathbb{U}}$ معادل با یک فرمول $\mathbb{U}$-نسبی‌شده است که در U فقط مثبت و در V فقط منفی ظاهر می‌شود. این در دو مرحله جداگانه بدست می‌آید. اول با استفاده از تبدیل چو نوع (a) رخدادهای منفی U حذف می‌شوند و دوم با استفاده از تبدیل چو نوع (b) رخدادهای مثبت V حذف می‌شوند. برای مرحله اول قرار دهید $\varphi_1 = \varphi^{\mathbb{U}}$ و φ_2 نتیجه تغییر نام U به U' در $\varphi^{\mathbb{U}}$ می‌باشد. آنگاه پایایی φ تحت تبدیل چو نوع (a) متناظر با عبارت معتبر زیر است:

$$\varphi_2(\mathbf{x},\mathbf{v}) \wedge \bigwedge U'\mathbf{x} \wedge \bigwedge V\mathbf{v} \wedge \forall x(U'x \to Ux) \models \varphi_1(\mathbf{x},\mathbf{v}).$$

این یک ترکیب شرطی میان فرمولهای $\{U,V,U'\}$-نسبی‌شده است، و قضیه (۸.۱.۲) یک فرمول $\{U,V,U'\}$-نسبی‌شده $\chi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ بدون رخدادهای U' و فقط با رخدادهای مثبت U را نتیجه می‌دهد. با مساوی قرار دادن U و U'، متوجه می‌شویم که $\varphi^{\mathbb{U}}$ و χ در واقع معادل هستند اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}$ گونه‌ها را حفظ کند. برای مرحله دوم، فرض کنید که $\varphi^{\mathbb{U}}$ در U مثبت است، و قرار دهید $\varphi_1 = \varphi^{\mathbb{U}}$ و φ_2 نتیجه تغییر نام V به V' در $\varphi^{\mathbb{U}}$ می‌باشد. پایایی φ تحت تبدیل چو نوع (b) به این معنی است که

$$\varphi_2(\mathbf{x},\mathbf{v}) \wedge \bigwedge U\mathbf{x} \wedge \forall x(Vx \to V'x) \models \bigwedge V\mathbf{v} \longrightarrow \varphi_1(\mathbf{x},\mathbf{v}).$$

قضیه (۸.۱.۲) یک فرمول $\{U,V,U'\}$-نسبی‌شده $\chi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ را نتیجه می‌دهد، که هنوز در U مثبت است و V' در آن ظاهر نشده و فقط رخدادهای منفی از V را دارد. با مساوی قرار دادن V و V'، متوجه می‌شویم که $\varphi^{\mathbb{U}}$ و χ در حقیقت معادل هستند اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}$ گونه‌ها را حفظ کند. این χ جدید

بطور اساسی می‌تواند به عنوان φ^* در نظر گرفته شود. با برخی ساده‌سازی های نحوی در بحث درونیابی چندگونه دیدیم که φ^* می‌تواند به فرمولی دوگونه در زبانی که فقط شامل E است با تنها سورهای وجودی روی گونه اولی و تنها سورهای عمومی روی گونه دوم ترجمه عکس شود.

$\square$

مراجع

[1] J. BARWIS, A preservation theorem for interpretations, *Proceedings of the Cambridge Summer School in Mathematical Logic*, Lecture Notes in Mathematics **337** (1973) 618-621.

[2] J. van. BENTHEM, Information transfer across Chu spaces, *Logic Journal of the IGPL* **8** (2000) 719-731.

[3] G. S. BOOLOS, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Fifth Edition, 2007.

[4] C. C. CHANG AND H. J. KEISLER, *Model theory*, North-Holland, 1990.

[5] W. CRAIG, Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *The Journal of Symbolic Logic* **22** (1957) 269-285.

[6] H. B. ENDERTON, *A Mathematical Introduction to Logic*, A Harcourt Science and Technology Company, Second Edition, 2001.

[7] S. FEFERMAN, Lectures on proof theory, *Proceedings of the Summer School in Logic* **70** (1968) 1-107.

[8] S. FEFERMAN, Applications of many-sorted interpolation theorems, *Proceedings of the Tarski Symposium* **XXV** (1974) 205-223.

[9] S. FEFERMAN, Ah ,Chu!, *JFAK. Essays dedicated to Johan van Benthem on the occasion of his 50th birthday* (1999).

[10] J. FLUM, First-order logic and its extensions, *Proceedings of the International Summer Institute and Logic Colloquium* **499** (1975) 248-310.

[11] W. HODGES, *Model theory*, Cambridge University Press, 1993.

[12] R. C. LYNDON, An interpolation theorem in the predicate calculus, *Pacific Journal of Mathematics* **9** (1959) 129-142.

[13] D. MARKER, *Model theory: An Introduction*, Springer, 2002.

[14] O. MARTIN, An Interpolation Theorem, *The Bulletin of Symbolic Logic* **6** (2000) 447-462.

[15] N. MOTOHASHI, Two theorems on mix-relativization, *Proceedings of the Japan Academy* **49** (1973) 161-163.

[16] PH. ROTHMALER, *Introduction to Model Theory*, CRC Press, 2000.

[17] J. STERN, A new look at the interpolation problem, *The Journal of Symbolic Logic* **40** (1975) 1-13.

واژه‌نامه

additional	اضافی
analogously	مشابهاً
antecedent	پیش فرض
appear	ظاهر شدن
approximation	شباهت
assert	ادعا کردن
asymmetry	نامتقارن
attribute	نسبت دادن
bottleneck	تنگنا
characterisation	رده‌بندی
comparison	مقایسه
consistency property	خاصیت سازگاری
contribute	ایجاد کردن
countable	شمارش‌پذیر
definability	تعریف‌پذیری
eliminate	حذف کردن
encoding	رمزنگاری
embedding	نشاننده

هم‌ارزی	equivalence
وجودی	existential
صریحاً	explicitly
روش	fashion
فرمول جریان	flow-formula
بنیادی	fundamental
همریختی	homomorphism
مساوی قرار دادن	identify
ترکیب شرطی	implication
درونیاب	interpolant
نامربوط	irrelevant
دستکاری	manipulation
چندگونه	many-sorted
یکنوایی	monotonicity
رخداد	occurrance
یکریختی جزئی	partial isomorphism
پدیده	phenomenon
قطبی‌سازی	polarity
محمول	predicate
پایایی	preservation
سور	quantifier
سوری‌سازی	quantification
شمارای بازگشتی	recursively enumerable
نسبی‌سازی	relativisation
اشباع‌شده	saturated

self-contained .... مستقل
stand for .... نشان‌دهنده
stipulation .... قرارداد
strengthen .... تقویت کردن
substructur .... زیرساختار
succedent .... پس فرض
superficially .... سطحی
symmetric .... متقارن
tuple .... چندتایی
unary .... تک-موضعی
universal .... عمومی
valid .... معتبر
versus .... در مقابل
vocabulary .... زبان
well-formed .... خوش‌ساخت

Surname: Jangi Bahador **Name:** Nayyer

Title: An Interpolation Theorem In First-Order Logic

Supervisor: Dr. Saeed Salehi

Advisor: Dr. Jafar sadegh Eivazloo

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2012 **Number of Pages:** 76

Keywords: classical model theory, first-order logic, many-sorted structures, interpolation, preservation and characterisation theorems.

Abstract

Lyndon's Interpolation Theorem asserts that for any valid implication between two purely relational sentences of first-order logic, there is an interpolant in which each relation symbol appears positively (negatively) only if it appears positively (negatively) in both the antecedent and the succedent of the given implication.

A similar, more general interpolation result with the additional requirement that, for some fixed tuple $\mathbb{U}$ of unary predicates U, all formulas under consideration have all quantifiers explicitly relativised to one of the U is proved in this thesis. under this stipulation, existential (universal) quantification over U contributes a positive (negative) occurrence of U.

It is shown how this single new interpolation theorem, obtained by a canonical and rather elementary model theoretic proof, unifies a number of related results: the classical characterisation theorems concerning extensions (substructures) with those concerning monotonicity, as well as a many-sorted interpolation theorem focusing on positive vs. negative occurrences of predicates and on existentially vs. universally quantified sorts.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

An Interpolation Theorem In First-Order Logic

Supervisor

Dr. Saeed Salehi

Advisor

Dr. Jafar sadegh Eivazloo

by

Nayyer Jangi Bahador

2012